A. gr. b.
469

Wurm. 17 II 40 an
A. Gr. b. 469

Apollonius

L. 6.

Des

APOLLONIUS VON PERGA

zwei Bücher

vom

Verhältnissschnitt

(de Sectione Rationis).

Aus dem Lateinischen des Halley übersetzt und mit Anmerkungen begleitet und einem Anhange versehen

von

August Richter.

Mit vier Tafeln Figuren.

ELBING.

Druck und Verlag von *F. W. Neumann-Hartmann.*

1836.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

DEM ANDENKEN

DES HERRN

Dr W. A. DIESTERWEG

ORDENTL. PROFESSORS DER MATHEM.
AN DER K. PR. RHEINUNIVERSITÄT

DES

VERDIENSTVOLLEN BEARBEITERS UND
WIEDERHERSTELLERS
APOLLONISCHER SCHRIFTEN.

Vorrede.

*Das Werk des **Apollonius** vom Verhältnissschnitt* (de sectione rationis) *wurde bis gegen den Anfang des vorigen Jahrhunderts für verloren gehalten. Da endlich entdeckte **Edm. Bernard**, Prof. der Astronomie und zugleich ein gründlicher Kenner der orientalischen Sprachen, unter den Manuscripten der Bodlejanischen Bibliothek in Oxford einen arabischen Codex, in dem er sogleich eine Übersetzung jenes Werkes erkannte. Erfreuet über diesen glücklichen Fund machte er sich mit grossem Eifer daran, das MS. ins Lateinische zu übertragen. Ehe er aber nur den zehnten Theil vollendet hatte, (siehe die Note zu S. 15) gab er sein Vorhaben auf, sey es dass ihn seine übrigen Studien abhielten oder dass ihn die Schwierigkeit des Unternehmens zurückschreckte; denn der Codex war nicht nur sehr schlecht geschrieben und entbehrte derjenigen Zeichen, durch die allein sich mehrere arabische Buchstaben von einander unter-*

scheiden, sondern liess auch oft einzelne Worte und bisweilen ganze Sätze aus und hatte in den Figuren häufig unrichtige Buchstaben. H a l l e y *endlich, sein zweiter Nachfolger, unternahm die Vollendung des Werkes. Man muss erstaunen über seine unermüdliche Geduld, wenn man bedenkt, dass er sich ohne alle Kenntniss der arabischen Sprache an diese Arbeit machte. Die erwähnte Übersetzung (welche noch nicht die 3 ersten Fälle des ersten Buches enthielt) musste ihm die Stelle einer Grammatik und eines Lexikons vertreten und eine wiederholte Vergleichung derselben mit dem arabischen Texte lehrte ihn endlich das ganze Werk verstehen und machte es ihm möglich dasselbe ins Lateinische zu übertragen. Die Übersetzung ist 1706 zu Oxford erschienen und mit einer kurzen Wiederherstellung der verloren gegangenen Apollonischen Schrift vom Raumschnitte* (de sectione spatii) *versehen. Aus der Vorrede zu diesem Werke sind die obigen historischen Notizen entlehnt.*

Halley stellt in derselben die Vermuthung auf, dass die arabische Übersetzung bald nach dem Jahre 820 unter dem Kalifen Almaimon angefertigt worden sey, welcher ein eifriger Beförderer der Wissenschaften war und mehrere philosophische und mathematische Werke der Griechen ins Arabische übertragen liess.

Der erwähnte Codex aber war zu Halley's Zeiten gegen **500** *Jahre alt, denn auf der ersten Seite befindet sich, nach Halley's Bemerkung, der Name des Besitzers mit der Jahreszahl* **633** *nach der muhamedanischen Zeitrechnung, das ist* **1235** *nach der unsrigen.*

Für die Echtheit des Werkes führt Halley folgende Gründe an: **1)** *beide Bücher des arabischen Manuscripts sind in so viele Fälle* (Loca) *und Arten* (Casus) *eingetheilt als* **Pappus** *in der Vorrede zum siebenten Buche seiner mathematischen Sammlung angiebt.* **2)** *die Anzahl und Ordnung der* casus dioristici *d. h. derjenigen* casus, *welche eine Determination erfordern, stimmt mit* **Pappus** *Angabe überein.* **3)** *das zweite Buch ist auf das erste zurückgeführt und entlehnt seine Determinationen eben daher, gerade so wie* **Pappus** *das Apollonische Werk beschreibt.* **4)** *dieselben Lemmata, welche in der arabischen Übersetzung hin und wieder vorkommen, beweist* **Pappus** *im Anfange seines siebenten Buches* *). **5)** *die vier letzten Lemmata* **) *trägt* **Pappus** *in derselben Ordnung und mit denselben Worten vor wie* **Apollonius** *die Bestimmung der kleinsten und grössten Verhältnisse in Fall* **6,** II. IV *und*

---

*) *Diese Lemmata finden sich in meinem „Raumschnitt"* (*Halberstadt* 1828).

**) *Lemma* 17 — 20.

Fall 7, II. IV *des ersten Buches. 6) die Figuren des arabischen Codex verrathen einen griechischen Ursprung, weil die Buchstaben nach der Ordnung des griechischen Alphabets auf einander folgen, welches vom arabischen verschieden ist.*

Diese Gründe sind allerdings triftig genug uns zu der Annahme zu berechtigen, dass der arabische Codex eine Übersetzung des Apollonischen Werkes sey. Betrachtet man aber Halley's Übersetzung genauer, so gelangt man bald zu der Überzeugung, dass dieses Werk in einer ziemlich unvollkommenen Gestalt vor uns liege. Die Mängel desselben betreffen aber theils die Eintheilung des Werkes theils die Ausarbeitung einzelner Theile.

Bedenkt man zuerst, dass der arabische Codex voller Lücken und an vielen Stellen undeutlich geschrieben war (adeo, *sagt Halley*, ut Divinatorem potius quam Interpretem ad sensum genuinum eruendum requisisse videretur), *dass Halley also nach eigener Ansicht die Lücken ausfüllte und die undeutlichen Stellen durch deutliche ersetzte: so geht schon hieraus hervor, dass wir den lateinischen Text nicht für eine getreue Übersetzung erklären können. Auffallende, von Halley nicht ausgefüllte, Lücken finden sich im ersten Buche in Fall 4*, II; *Fall 5*, II; *Fall 6*, III; *Fall 7*, I. III. *In der Synthesis zu Fall 4*, II *wird nicht bewiesen, dass die Linie*

HK *) *die Aufgabe löse; und doch fehlt dieser Beweis sonst nirgend im ersten Buche. In den übrigen genannten Stellen aber fehlt am Ende der Zusatz: „Die dem Punkte* M *näheren geraden Linien schneiden kleinere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren." Ein solcher Zusatz findet sich in allen übrigen* Casus *des ersten Buches und darf desshalb nicht fehlen, weil sich das zweite Buch darauf bezieht (vergl. Buch 2 Fall 10,* III. IV; *Fall 14,* III. IV*). Ein merkwürdiges Glossem dagegen findet man unter andern am Ende des ersten Buches, nämlich die Worte* vel minor erit ea *bei der Bestimmung des Gränzverhältnisses in Fall 7,* IV.

Erwägt man ausserdem den wichtigen Umstand, dass Halley der arabischen Sprache ganz unkundig war und aus dem MS. selbst sie erst erlernte: so dürfte wohl der Zweifel erlaubt seyn, ob er den arabischen Text auch überall richtig verstanden habe. Wie leicht kann man unter solchen Umständen eine grammatische Form falsch deuten, mit einer ähnlichen verwechseln und so einem Gedanken eine verkehrte Wendung geben; und wie leicht kann

---

*) *Halley hat in seiner Übersetzung die Buchstaben der Figuren aus dem griechischen Alphabet genommen; es werden dafür in dieser Vorrede und in den Noten stets die Figuren der folgenden Übersetzung benutzt werden.*

einen solchen Fehler derjenige begehen, welcher sich ohne alle Sprachkenntniss an die Übersezzung einer mangelhaften und undeutlichen Handschrift wagt. Folgende Stelle scheint mir hierzu einen Belag zu enthalten. Im zweiten Theile der Synthesis von Fall 4, III *des zweiten Buches heisst es:* ac recta *GP* auferet rationem *FH* ad *EK* majorem quavis ratione quam secant rectae quaevis aliae per punctum *G* ductae, totique rectae *FM* occurrentes; vel quam rectae quae soli rectae *HM* occurrunt. Recta vero *GJ* abscindet rationem *FM* ad *ME* minorem quavis ratione quam auferunt rectae quaelibet soli *HM* occurrentes. *Die letzten (gesperrten) Worte fehlen im MS. und sind von Halley zugesetzt, da sie mit cursiver Schrift gedruckt sind. In der Mitte des Satzes aber findet sich der ganz unpassende Zusatz* vel quam rectae quae soli rectae *HM* occurrunt, *gerade die Worte, welche am Ende des Satzes fehlen. Sollte man hier nicht auf die Vermuthung kommen dürfen, dass diese Worte im MS. mit dem Folgenden verbunden sind und dass etwa so zu lesen seyn möchte:* omnium vero soli rectae *HM* occurrentium recta *GJ* abscindet rationem *FM* ad *ME* minimam. *Eben so ist in der Stelle Buch 2 Fall 5,* I. II *zu Ende vielleicht zu schreiben* ducantur — auferentes *statt* ductae — auferent.

Das Werk leidet aber ausserdem an Fehlern, die nicht sowohl dem Verfasser des lateinischen Textes als vielmehr dem arabischen Übersetzer zur Last zu fallen scheinen, und es ist merkwürdig, dass diese Fehler nur das zweite Buch betreffen. Das erste Buch haben wir, bis auf einige Lücken, die dem Abschreiber zugerechnet werden können, und bis auf einige Glosseme, von denen selten im Laufe von Jahrhunderten ein handschriftliches Werk befreit bleiben wird, in so vollkommener Gestalt erhalten, dass es höchstens in Kleinigkeiten vom Originale abweichen mag. Das zweite Buch hingegen trägt an vielen Stellen den Stempel der Flüchtigkeit, was schon die mangelhaften Figuren verrathen, und scheint grossentheils nicht sowohl eine treue Übersetzung als vielmehr eine nach oberflächlicher Durchsicht des Originals angefertigte freie Arbeit zu seyn. Diese Flüchtigkeit zeigt sich besonders in der ungleichmässigen Behandlung dieses Buches. Dahin rechne ich zunächst Folgendes.

Nachdem in denjenigen Fällen, welche auf das erste Buch zurückgeführt werden, die Analysis gezeigt hat, dass das Verhältniss NP : FK *gegeben sey, wird in allen (den 6ten ausgenommen) entweder in allen Arten* (Casus) *oder doch in den ersten hinzugefügt: »Es sind also zwei gerade Linien* NP, CD *der Lage nach ge-*

geben u. s. w.", wodurch derjenige Fall des ersten Buches bestimmt wird, auf welchen der vorliegende des zweiten zurückkommt. So geschieht diess, mit Ausnahme der Fälle 7. 8. 9, welche unabhängig vom ersten Buche gelöst werden, in Fall 1. 2 durchweg, in Fall 3, I; *4,* I. II; *5,* I. II; *10,* I; *11,* I; *12,* I; *13,* I. II. III; *14,* I. *Nur in Fall 6,* I. II. III *geschieht diess nicht, sondern erst in Fall 6,* IV. — *Ferner rechne ich dahin folgende zwei Sätze. Fall 7,* II *am Ende heisst es:* Recta igitur *GK* solvit problema; ac dico quod ea sola. Nam si ducatur recta alia ut *GR*; manifestum est illam satisfacere problemati, hanc vero non item. *und Fall 7,* III *am Ende:* Recta igitur *GK* solvit problema, eaque sola. Nam si ducatur recta alia, illa quidem satisfacit problemati, altera vero non item. *Diese Zusätze haben keinen Werth, wenn nicht b e w i e s e n wird, dass die andere Linie das Verlangte nicht leiste; auch kommen sie sonst nirgend im zweiten Buche vor. Wollte man einwenden, sie seyen desswegen von Apollonius gemacht, weil der 7te Fall unabhängig vom ersten Buche gelöst wird: so ist nur nicht abzusehen, warum ein solcher Zusatz nicht auch in Fall 8. 9 und nicht schon in Fall 7,* I *gemacht wurde. — Ferner im ersten Buche wird in den Arten der Fälle 3 bis 7, in welchen kein* maximum *oder* minimum

statt findet, bewiesen, dass die dem Punkte M *in* AB *näheren geraden Linien grössere oder kleinere Verhältnisse bestimmen als die von ihm entfernteren. Da nun in den Fällen des zweiten Buches, welche auf das erste zurückgeführt werden, die Linie* NP *(oder* EP *in Fall 11) der Linie* AB *des ersten Buches, und der Punkt* N *(oder* E *in* EP*) dem Punkte* M *im ersten Buche entspricht: so hätte der Symmetrie wegen im zweiten Buche die nähere oder entferntere Lage der zu ziehenden Linien auf den Punkt* N *in* NP *(oder* E *in* EP*) und nicht auf den Punkt* E *in* CD *bezogen werden müssen. Das letztere geschieht aber in Fall 11,* III. IV*; Fall 12,* I*; Fall 13,* IV.

Zu der ungleichmässigen Behandlung des zweiten Buches rechne ich auch die auffallende Kürze in einzelnen Theilen mancher Fälle, wodurch zuweilen selbst Unrichtigkeiten entstehen. Dahin gehört der Schluss von Fall 9, IV, *wo nach der Determination bloss die Worte folgen:* Constat autem ex jam traditis, compositionem fieri posse duobus modis, utrinque a recta *GH*; scilicet rectis *EK*, *KL* occurrentibus, *was nur dann richtig ist, wenn das gegebene Verhältniss grösser als* EH:FK *ist. Ähnlich sind die Schlüsse von Fall 10,* V*; Fall 12,* III. IV*; Fall 14,* II. V. — *In der Synthesis zu Fall 4,* I *fehlt die Construction, welche hier nicht fehlen darf, weil der*

nachfolgende Beweis sie voraussetzt. — In Fall **12,** I *findet sich eine falsche Auflösung.*

Am merkwürdigsten aber ist ein sonderbares Schwanken in der Angabe des abzuschneidenden Verhältnisses. Durch das ganze zweite Buch hindurch werden die in AB, CD *gegebenen Punkte* E, F *regelmässig mit* γ, ζ *bezeichnet. In einigen Fällen wird aber* γ *oder* E, *in andern dagegen* ζ *oder* F *als Anfangspunkt des abzuschneidenden Verhältnisses angenommen; und diese Unregelmässigkeit wird noch dadurch vergrössert, dass selbst in einem und demselben Falle bald der eine bald der andere Punkt genommen wird. Folgende Übersicht wird diess deutlich machen.*

Das abzuschneidende Verhältniss ist in

Fall **1. 2. 3**		EH : FK
Fall **4,** I	*Analysis*	EH : FK
	Synthesis	FK : EH
Fall **4,** II	*Analysis* . . *zuerst*	EH : FK
	dann	FK : EH
	Determ. Synth.	EH : FK
Fall **4,** III. IV		EH : FK
Fall **4,** V		FK : EH
Fall **5. 6** / *Fall* **7,** I		FK : EH
Fall **7,** II. III / *Fall* **8. 9**		EH : FK
Fall **10 — 14**		FK : EH

Am unregelmässigsten ist offenbar der 4te Fall, welcher eben desswegen auch die auffallende Erscheinung darbietet, dass, wenn NH *gleich der mittlern Proportionale genommen wird, die Linie* GH *sowohl in* Cas. II. III *als auch in* Cas. V *beide Male ein* *g r ö s s t e s* *Verhältniss abschneidet, obwohl ihnen entgegengesetzte Determinationen des ersten Buches zum Grunde liegen.*

Diese Verschiedenheit in der Angabe des abzuschneidenden Verhältnisses lässt sich nur auf zweierlei Weise erklären. Entweder sind in den Figuren beständig die Buchstaben E, F *mit einander verwechselt, d. h. der in* AB *als Anfangspunkt des Verhältnisses gegebene Punkt wird bald* E *bald* F *genannt; oder es findet wirklich eine stete Verwechslung der Verhältnissglieder statt, d. h. bald ist das in* AB, *bald das in* CD *liegende Segment das erste Glied des Verhältnisses (wie wenn im ersten Buche in Figur* **10 — 25** *das abzuschneidende Verhältniss bald* MH : FK *bald* FK : MH *genannt würde). Könnte nun jenes Schwanken auf die erste Art erklärt werden, so würde es dem Werke selbst nicht zum Tadel gereichen, sondern nur der Unaufmerksamkeit des Übersezzers zur Last fallen. Und in Fall* **7**, *Fall* **10** *bis* **14** *kann allerdings diese Erklärung statt finden. Die* I. *Figur stellt die Lagen des Punk-*

tes G *in allen 14 Fällen des 2ten Buches vor, genau nach Anleitung des lateinischen Textes, wenn statt* γ, ζ *die Buchstaben* E, F *gewählt und durch* E, F *die Linien* ON, PQ *parallel mit* CD, AB *gezogen werden. In Fall 7, wo der Punkt* G *im Durchschnitte der Linien* ON, PQ *liegt, hat* G *gegen* E, F *einerlei Lage und es ist also ganz einerlei, welcher von diesen Punkten als Anfangspunkt des Verhältnisses nommen wird. Man kann daher die Unregelmässigkeit in Fall 7,* I *leicht durch Vertauschung der Buchstaben* E, F *heben. Eben so hat in Fall 10—13 der Punkt* G *gegen* E, F *ganz gleichmässige Lage und verändert sie nicht, wenn man die Buchstaben* E, F *mit einander verwechselt. Nur in Fall 14 würden wir bei jener Vertauschung auch eine rsetzung des Punktes* G *in den mit * bezeichneten Raum* AEG'P *vornehmen müssen; alles Übrige aber bleibt auch hier unverändert. — Die Fälle 4 bis 6 dagegen bilden mit Fall 2. 3 ein zusammenhängendes Ganze, wie aus ihrem gemeinschaftlichen, in den Beschreibungen derselben ausgesprochenen, Eintheilungsgrunde erhellet. Es sey nämlich in Fig.* II *in* AB *der Punkt* E, *in* CD *der Punkt* F *gegeben, so liegen in Fall 2 bis 6 die Punkte* G, E *auf verschiedenen Seiten der* CD, *die Punkte* G, F *aber auf einer Seite der* AB. *Verbindet man* GE, *welche* CD

in N *schneide, und zieht* GL ⫩ AB: *so durchläuft der Punkt* F *alle in* MD *gegebenen Punkte und Abschnitte und seine verschiedenen Lagen bestimmen die einzelnen Fälle, wie in der Figur durch Ziffern neben* F *angedeutet ist. Offenbar kann hier keine Vertauschung der Buchstaben* E, F *angenommen werden und es sollte in allen diesen Fällen* F *der Anfangspunkt entweder des Vordergliedes oder des Hintergliedes seyn. Ausserdem ist aber in diesen Fällen das Gesetz der* **Einheit** *und* **Einfachheit** *noch durch eine verschiedene Construction verletzt worden (vergl. Fig. 32 — 40 mit Fig. 41 bis 54). Denn da die Fälle 2 — 6 auf das erste Buch zurückgeführt werden, so muss durch* G *eine Parallele nach derjenigen von den Linien* AB, CD *gezogen werden, in welcher der Durchschnittspunkt* N *der Linie* GE *oder* GF *liegt. Wird nun* GE *verbunden (Fall 2. 3), so muss nach* CD *eine Parallele* GL *gezogen werden; diese bestimmt aber zugleich die Eintheilung der Fälle 2 — 6. Wird dagegen* GF *verbunden (Fall 4 — 6), so ist ausser* GL *noch eine Parallele* GO *nach* AB *erforderlich.*

Diess scheint **Halley** *übersehen zu haben, wenn er S. 137 seiner Ausgabe behauptet:* „*Fast das ganze zweite Buch hindurch kann* „*auf eine doppelte Weise construirt werden, ob-* „**wohl diess Apollonius verschweigt;**

„ohne Unterschied nämlich kann aus G
„entweder nach AB *oder nach* CD *eine Par-*
„allele gezogen werden."

Ein evidenter Beweis für die Unrichtigkeit dieser Behauptung lässt sich, glaube ich, aus denjenigen Casus *herleiten, in welchen ein* maximum *oder* minimum *statt findet. Es sey in Fig.* III. IV EH:FK *das abzuschneidende Verhältniss: so lehrt die Analysis, dass*

in Fig. III *das Verhältniss* NP : FK
in Fig. IV . . . . NP : EH

nach dem ersten Buche bestimmt werden müsse. Das Verhältniss EH : FK *erreicht aber die Gränze, wenn auch*

NP : FK *in Fig.* III,
oder . . . . . NP : EH *in Fig.* IV

die Gränze erreicht, und diese letzteren Verhältnisse sind dann von der Form

$$GO : a \pm \sqrt{b} \text{ in Fig. III,}$$
$$GL : a \pm \sqrt{b} \text{ in Fig. IV.}$$

Nun ist in Fig. III

$$\begin{array}{l} EH : NP = EL : GO \\ NP : FK = GO : a \pm \sqrt{b} \\ \hline EH : FK = EL : a \pm \sqrt{b} \end{array}$$

und dieses Gränzverhältniss stimmt mit dem ersten Buche überein. — In Fig. IV *aber ist*

$$\begin{array}{l} FK : NP = FO : GL \\ NP : EH = GL : a \pm \sqrt{b} \\ \hline EH : FK = a \pm \sqrt{b} : FO \end{array}$$

ein Gränzverhältniss, welches sowohl in Hinsicht der Form als der Grösse den Determinationen des ersten Buches gerade entgegengesetzt ist. Es scheint mir hieraus hervorzugehen, dass es nicht einerlei sey, welcher von den Punkten E, F *mit* G *verbunden werde; dass vielmehr derjenige dazu genommen werden müsse, welcher als Anfangspunkt des Verhältnisses betrachtet wird. Und diese Ansicht bestätigt Apollonius selbst dadurch, dass er, obwohl diess sonst immer wo es möglich ist geschieht, die Fälle 8, 9 nicht auf das erste Buch zurückführt. Diess konnte er desswegen nicht, weil der Punkt* E, *wie aus der Eintheilung des Werkes hervorgeht, nothwendig als Anfangspunkt des Vordergliedes zu betrachten ist und die Linie* GE *der* CD *nicht begegnet. Dass aber Apollonius es vorzog, selbst diejenigen Fälle, welche unabhängig vom ersten Buche gelöst werden können, auf dasselbe zu reduciren, geht aus folgenden zwei Beispielen unwiderleglich hervor. Zuerst konnte augenscheinlich der 2te Fall gerade so behandelt werden wie der 8te oder 9te. Zweitens in Fall 6 (Fig. 51—54) soll das gegebene Verhältniss* FK : EH *abgeschnitten werden. Zieht man in allen Figuren* GO ∓ MF *und* GLN ∓ ME, *so ist in allen vier* Casus

$$FK : EP = FL : EN$$
$$= FL : GO$$
$$EP : EH = GO : OH,$$

also . . . . . $FK : EH = FL : OH$,

folglich ist OH *bekannt. Aus dieser Auflösung ergeben sich selbst die Determinationen viel kürzer als bei Apollonius. Denn es ist offenbar*

in Fig. **51** $FL : OH < FL : OE$

und in Fig. **52** $FL : OH < FL : OM$ *u. s. w.*

Dieselbe Bemerkung gilt auch für Fall **11** *(Fig.* **71 — 74**).

Eine Wiederherstellung der Fälle **4 — 6** *nach den oben angedeuteten Ansichten zu unternehmen ist aber bedenklicher als es auf den ersten Anblick scheinen möchte. Denn weil die Herstellung des Verhältnisses* EH : FK *noch nicht genügen würde, sondern zugleich die Construction verändert werden müsste, um sie mit der in Fall* **2. 3** *angewandten in Übereinstimmung zu bringen: so würden die Linien* HK *in einer andern Reihe auf einander folgen und die Determinationen in andere* Casus *verlegt werden, wie diess das folgende Schema zeigt, in welchem ein Sternchen eine Determination, zwei eine zweitheilige Determination andeuten.*

Fall 4.				*Fall 5.*		
Halley;		*Wiederh.*		*Halley;*		*Wiederh.*
cas. *1*	=	cas. *1*		cas. *1*	=	cas. *4*
2**	=	5**		2	=	3
3**	=	4**		3*	=	2*
4	=	3		4*	=	1*
5*	=	2*		5	=	5

Fall 6.

Halley;		*Wiederh.*
cas. *1**	=	cas. 3*
2*	=	2*
3*	=	1*
4	=	4

Ordnet man die Casus *der Fälle 4. 5 nach ihrer Reihenfolge*

Fall 4.		*Fall 5.*	
Halley	*Wiederh.*	*Halley*	*Wiederh.*
cas. *1*	cas. *1*	cas. *1*	cas. *1**
2**	2*	2	2*
3**	3	3*	3
4	4**	4*	4
5*	5**	5	5

so übersieht man leicht, dass die Wiederherstellung vom lateinischen Texte bedeutend abweichen würde.

Wir wenden uns nun zu der Eintheilung des Werkes. Versetzt man nach dem Obigen in Fig. I *den Punkt* G^{14} *in den Raum* $AEG^{7}P$, *so ergiebt sich folgende*

Übersicht:

I. *Die Linien* AB, CD *sind parallel (Buch* I. *Fall 1. 2).*

II. *Die Linien* AB, CD *schneiden einander (Buch* I *Fall 3 bis Buch* II *zu Ende).*

1. *In* AB *wird der Durchschnittspunkt* M *genommen (Buch* I *Fall 3 — 7).*
   (1) *In* CD *wird der Punkt* M *genommen (Fall 3).*
   (2) *In* CD *wird ein anderer Punkt* F *genommen (Fall 4 — 7).*
      A) *die Punkte* G, F *liegen auf verschiedenen Seiten der* AB *(Fall 4).*
      B) *die Punkte* G, F *liegen auf einer Seite der* AB *(Fall 5 — 7).*
         a) *der Punkt* F *liegt in der Parallele* GL *(Fall 5).*
         b) *der Punkt* F *liegt nicht in der Parallele* GL *(Fall 6. 7).*
2. *In* AB *wird der Punkt* E *(und in* CD *der Punkt* F*) genommen (Buch* II*).*
   (1) *Die Punkte* G, E *liegen auf verschiedenen Seiten der* CD *(Fall 1—6).*
      A) *die Punkte* G, F *liegen auf verschiedenen Seiten der* AB *(Fall 1).*
      B) *die Punkte* G, F *liegen auf einer Seite der* AB *(Fall 2—6).*
         a) *die Parallele* GL *trifft den Punkt* F *(Fall 2).*

b) *die Parallele* GL *trifft den Punkt* F *nicht (Fall 3—6).*

(*a*) *der Punkt* F *liegt jenseit* *) GL *(Fall 3).*

(*b*) *der Punkt* F *liegt diesseit* *) GL *(Fall 4—6).*

α) GE *geht nicht durch* F *(Fall 4. 5).*

β) GE *geht durch* F *(Fall 6).*

(2) *Die Punkte* G, E *liegen auf einer Seite der* CD *(Fall 7—14).*

A) *Die Linie* GE *ist* ∓ CD *(Fall 7. 8. 9).*

a) *die Parallele* GL *geht durch* F *(Fall 7).*

b) *die Parallele* GL *geht nicht durch* F *(Fall 8. 9).*

B) *Die Linie* GE *ist nicht* ∓ CD *(Fall 10—14).*

a) *der Punkt* F *liegt diesseit* GL *(Fall 10).*

b) *der Punkt* F *liegt jenseit* GL *(Fall 11—14).*

(*a*) GE *trifft die* MD *(Fall 11—13).*

(*b*) GE *trifft die* MC *(Fall 14).*

---

*) *nämlich in Bezug auf* AB.

Diese Eintheilung, welche von dem Gesichtspunkte ausgeht, dass die Lage des Punktes G *gegen den Anfangspunkt des abzuschneidenden Verhältnisses den Eintheilungsgrund bilden müsse, giebt uns Apollonius selbst an die Hand, indem er bei der Anordnung der Fälle 3 — 7 des ersten Buches offenbar folgende zwei Gesetze beobachtet: 1) der Anfangspunkt* M *behält gegen* G *eine unveränderliche Lage. 2) der Punkt* F *als Anfangspunkt des Hintergliedes verändert seine Lage gegen* G. *Da nun im 2ten Buche die Stellung des Punktes* G *aus seinen Lagen gegen* E, F *zusammengesetzt ist, so werden hier, wenn* E *als Anfangspunkt festgesetzt wird, die verschiedenen Lagen der Punkte* G, E *die Hauptheile, und die Lagen der Punkte* G, F *die Unterabtheilungen bilden müssen. Hieraus ergiebt sich die Eintheilung*

(1) G, E *auf verschiedenen Seiten der* CD *(Fall 1 — 6).*

(2) G, E *auf einer Seite der* CD *(Fall 7—14).*

In der zweiten Abtheilung kommt aber noch die parallele Lage der GE *als neuer Eintheilungsgrund hinzu, weil nach der oben ausgesprochenen Ansicht diejenigen Fälle, in welchen* GE $\nparallel$ CD *ist, nicht auf das erste Buch zurückgeführt werden können.*

Dass diese Eintheilung nicht allen Forderungen genüge, fällt in die Augen. Der Ein-

wand, dass die 14 Fälle des zweiten Buches die möglichen Lagen des Punktes G *nicht erschöpfen, indem der Winkel* AMC *in Fig.* I *unbesetzt geblieben ist, lässt sich noch damit heben, dass die hier entstehenden Fälle als erledigt durch die übrigen betrachtet werden können. Dagegen ist es wohl den Gesetzen einer streng logischen Disposition nicht angemessen, dass am Ende beider Hauptabtheilungen dieses Buches zwei und drei Fälle einem einzigen coordinirt werden, nämlich Fall 4. 5 mit Fall 6 und Fall 11—13 mit Fall 14. Offenbar sollte folgende Anordnung statt finden: Fall 6. 4. 5 und Fall 14. 11—13. Es ist bereits oben aus anderweitigen Gründen nachgewiesen worden, dass die Fälle 4—6 verdorben zu seyn scheinen, also könnte auch wohl eine Versetzung derselben als möglich angenommen werden. Wenn sich aber auch die Ordnung derselben allenfalls noch rechtfertigen lässt, so scheint diess doch bei den Fällen 11—14 so wenig möglich zu seyn, dass* D i e s t e r w e g *in seiner Bearbeitung der* Sectio Rationis *den Fall 10 ohne Weiteres an das Ende des Werkes stellen zu müssen geglaubt hat. So gewagt eine solche Conjectur erscheinen mag, so erhält sie doch einen bedeutenden Grad von Wahrscheinlichkeit durch folgenden merkwürdigen Umstand.* P a p p u s *lässt auf sein 20stes Lemma eine Aufgabe fol-*

gen, welche bei **Commandinus** *die Überschrift führt:*

Problema in secundum *) de sectione proportionis **), utile ad epilogum tertii decimi loci. *Dieselbe Aufgabe findet sich auch bei* **Halley** ***) *mit der Überschrift:*

Πρόβλημα εἰς τὸ δεύτερον λόγου ἀποτομῆς χρήσιμον εἰς τὴν τοῦ ιγ' τόπου ἀνακεφαλαίωσιν *oder nach seiner Übersetzung:* Problema ad secundum de Sectione Rationis, utile ad Recapitulationem Loci decimi tertii. *Es scheint also, als ob dem Werke des Apollonius irgend ein Anhang beigefügt war, welcher mit dem 13ten Falle in Verbindung stand. Ein solcher Anhang findet sich nun in der That in der Halley'schen Ausgabe hinter dem 14ten Falle mit der Überschrift* ἀνακεφαλαίωσις. *Ist dieser Zusatz der von* **Pappus** *angedeutete und ist die Lesart zum 13ten Falle gehörig* †) *richtig,*

---

*) *nämlich* librum.

**) *das ist* rationis.

***) *Halley hat in seiner Ausgabe der* Sectio Rationis *die Vorrede des* **Pappus** *zum 7ten Buche seiner* Collect. Mathem. *nebst den ersten 20 Lemmen desselben aus zwei Handschriften der Savilianischen Bibliothek in griechischer Sprache mitgetheilt und dieselben mit der verbesserten lateinischen Übersetzung des* **Commandinus** *begleitet.*

†) *Halley bemerkt am Ende der eben erwähnten griechischen Vorrede des* **Pappus:** quæ uncis

so ergiebt sich sogleich, dass die Anordnung der Fälle 10 — 14 verändert werden müsse. Denn der 13te Fall wird auf den 4ten des ersten Buches reducirt, welcher nicht determinirt ist; die Aufgabe der Recapitulation dagegen wird auf den 6ten oder 7ten Fall des ersten Buches gebracht, wo ein Maximum *und ein* Minimum *statt findet. Bringen wir nun den 14ten Fall vor den 11ten, so wird dadurch der 12te zum 13ten, welcher auf Buch 1 Fall 6 zurückkommt; oder setzen wir den 10ten Fall ans Ende des Werkes, so wird dadurch der 14te zum 13ten und dieser reducirt sich auf Buch 1 Fall 7. — Wozu aber, kann man fragen, dient diese Recapitulation, da sie nichts anders enthält als einen vorhergehenden Fall, nur ausführlicher abgehandelt? Und ausserdem ist gar kein Zusammenhang zwischen der Aufgabe des Pappus und der ἀνακεφαλαίωσις zu entdecken. Die Aufgabe ist nämlich folgende (Fig.* IV*):*

---

inclusimus desunt et in MSS. nostris et quibus usus est Commandinus. *Es geht hieraus zwar hervor, dass beide Mathematiker verschiedene* Codices *benutzten, indessen lässt sich daraus kein Beweis für die Richtigkeit der obigen Lesart ableiten, weil Halley selbst die Zuverlässigkeit seiner Handschriften durch die Erklärung schwächt:* Græca Pappi in hisce Codicibus saepiuscule luxata sunt et depravata.

»In einer geraden Linie sind 3 Punkte N, L, E
»gegeben; man soll in der Verlängerung ei-
»nen vierten x *finden, so dass*

$$Nx : xE = Lx : EN + NL - \sqrt{4EN.NL}$$

»ist. *)

Der Punkt x *wird gefunden, wenn man*

$$ES = EN + NL - \sqrt{4EN.NL}$$

und . . $\square$ Lx . xS = $\square$ NL . ES

macht. — Die natürlichste Vermuthung über den Zweck dieses Lemma wäre wohl die, dass der Punkt x *zur Bestimmung des Gränzverhältnisses dienen sollte. Macht man nun* NH *gleich der mittlern Proportionale zwischen* EN, NL *und* HR = HL*: so wird in Fall 7 des ersten Buchs gezeigt, dass*

$$ER = ES = EN + NL - \sqrt{4EN.NL}$$

und dass das Gränzverhältniss gleich

$$NP : EH = GL : ER$$

sey. Es ist also perm.

$$NP : GL = EH : ER$$

das ist . . . NH : HL = EH : ER,

folglich leistet der Punkt H *dasselbe als der Punkt* x. *Sollte nun die Aufgabe des Pappus etwa dazu dienen, den Punkt* H *zu finden: so ist dabei zu bemerken, dass 1) der Punkt* H *(oder* x*) nicht in der verlängerten* NE *liegen darf und 2) dass er viel einfacher durch die mittlere Proportionale* NH *bestimmt wird. —*

---

*) *siehe Raumschnitt Lemma* 35.

Noch eine andere Vermuthung über den Zweck jener Aufgabe bietet sich dar. Das Gränzverhältniss des ersten Buches ist

NP : EH = GL : ER = NV : ER

Es ist also perm. . NP : NV = EH : ER

also auch . . . . . . FK : FO = EH : ER,

und perm. . . . . . . FK : EH = FO : ER.

Nun ist aber FK : EH *das Gränzverhältniss des zweiten Buches, also auch* FO : ER. *Vielleicht sollte nun die Aufgabe des Pappus das Verhältniss* FO : ER *in ein dem ersten Buche analoges, etwa* GL : Ex, *umgestalten.* — *Ob uns aber die Aufgabe des Pappus richtig überliefert ist, scheint mir auch noch nicht gewiss zu seyn. Denn in der Ausgabe des Commandinus finden sich zwischen jenem Lemma und der Analysis folgende Worte:* Sed aliter constitui non potest, nisi utraeque *xN, EL* aequales sint excessui *SE,* totaque *xE* toti *EN,* et adhuc *SE, EL, LN* inter se proportionem habeant quam numerus quadratus ad quadratum numerum et *NL* ipsius *xS* sit dupla. *Diese Worte haben nun allerdings keinen Sinn und Commandinus bemerkt dazu in seinem Commentar:* Vereor, ne haec ab aliquo addita sint, non enim video cur problema aliter constitui non possit. *Aber eben daraus, dass dieser Zusatz ganz unverständlich ist, möchte man schliessen, der Glossator habe entweder eine andere Aufgabe vor sich gehabt,*

oder sie wenigstens aus einem besondern Gesichtspunkte aufgefasst.

Doch hiermit werde fernern Vermuthungen und Bemerkungen ein Ziel gesetzt, um so mehr, da zu näherer Begründung derselben eine Vergleichung des arabischen MS. mit der Halley'schen Ausgabe unumgänglich erforderlich ist. Die vorstehenden Betrachtungen wollte ich desshalb nicht unterdrücken, weil sie vielleicht dereinst einen Wiederhersteller des Apollonischen Werkes zu weiteren Untersuchungen veranlassen dürften. Ohne Zweifel wäre es für diese Bemerkungen ein wichtiger Vortheil gewesen, wenn ein so gründlicher Kenner der Apollonischen Schriften, wie Diesterweg es war, sie vor ihrer Bekanntmachung einer Prüfung hätte unterziehen wollen. Seine Gesundheit war aber (wie er mir im April v. J. aus dem Bade Eilsen schrieb) so angegriffen, dass er meine Bitte nicht erfüllen konnte. Leider traf schon wenige Wochen darauf die schmerzliche Nachricht seines zu frühen Dahinscheidens ein, und so fühle ich denn, indem ich jetzt von seiner freundlichen Erlaubniss, den vorliegenden Versuch mit seinem Namen zu zieren, Gebrauch mache, nur um so lebhafter den Wunsch, ich möchte im Stande gewesen seyn, meine Hochachtung gegen diesen edlen Mann durch ein weniger unvollkommenes Werk an den Tag zu legen.

In der Hoffnung dass es wünschenswerth erscheinen möchte, die Sectio Rationis *neben der freien Bearbeitung, welche Diesterweg geliefert hat, auch in einer dem Original sich anschliessenden Übertragung zu besitzen — und diese Ansicht spricht auch der Recensent jener Bearbeitung in der Jen. Lit. Z. 1827. E. B. № 79 aus — habe ich hier den Versuch unternommen von dem Halley'schen Texte eine treue Übersetzung zu liefern. Nur an einigen Stellen, wo offenbare Unrichtigkeiten oder nothwendig auszufüllende Lücken vorhanden waren, habe ich mir Abweichungen erlaubt, die jedoch überall in den Noten bemerkt worden sind. Auch eine im Anfange einer Analysis, Determination, Synthesis immer wiederkehrende Formel ist fast überall weggelassen worden, weil sie im Deutschen auffallend und gezwungen klingen möchte. Diese Formel besteht in den Worten:* maneant descripta, *oder* manentibus descriptis, *oder* maneant quae supra, *oder* manentibus autem omnibus jam descriptis *u. s. w. Die Wörter* A n a l y s i s, D e t e r m i n a t i o n, S y n t h e s i s *sind von mir der Deutlichkeit wegen hinzugesetzt worden; das erste fehlt im Lateinischen gänzlich, die beiden letzten aber werden (mit Ausnahme einer Stelle) immer umschrieben, jenes durch* determinatur autem hunc in modum, *dieses durch* componetur (construetur) autem

(problema) hunc in modum *u. s. w. Die mit gesperrter Schrift gedruckten Worte fehlen im arabischen Codex und sind von Halley ergänzt.*

Die Örter, welche die Aufgaben der Sectio Rationis *lösen, sind im Wesentlichen aus der Halley'schen Ausgabe entlehnt. Ich hielt es, der Übersicht wegen und um das Apollonische Werk nicht zu unterbrechen, für zweckmässig sie im Anhange zusammen zu stellen, während Halley einen jeden Ort an der ihm gebührenden Stelle mittheilt.*

Elbing, im Januar 1836.

Der Verfasser.

Des

APOLLONIUS VON PERGA

zwei Bücher

vom

Verhältnissschnitt

(*de Sectione Rationis*).

Des

APOLLONIUS VON PERGA

vom

Verhältnissschnitt

Erstes Buch.

Es sind zwei unbegränzte gerade Linien in derselben Ebene der Lage nach gegeben, welche entweder gegenseitig parallel sind oder einander schneiden; und in jeder derselben ist ein Punkt gegeben, auch ist ein Verhältniss und überdiess ein Punkt ausserhalb der Linien gegeben. Man soll durch den gegebenen Punkt eine gerade Linie ziehen, welche von den der Lage nach gegebenen Linien Segmente abschneidet, deren Verhältniss dem gegebenen gleich ist.

Erstlich seyen die der Lage nach gegebenen Linien gegenseitig parallel, wie *AB*, *CD*; und in *AB* werde der Punkt *E*, in *CD* aber der Punkt *F* genommen. Zieht man durch *E*, *F* die Linie *EFL*, so wird der gegebene Punkt entweder im W. *DFL*, oder innerhalb der Winkel *BEF*, *EFD*, oder innerhalb der angränzenden Räume liegen.

Fall 1.

Er liege nun zuerst im $\angle$ *DFL*, wie der Punkt *G*. Die Linien aber, welche aus dem Punkte *G* ausgehend von den der Lage nach gegebenen geraden Linien den Punkten *E*, *F* anliegende Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneiden, können auf drei Arten gezogen werden; in sofern die Segmente entweder in *EB*, *FD*; oder in *EA*, *FD*; oder endlich in *EA*, *FC* genommen werden.

Cas. I. Fig. 1. *Analysis. Es werde nun nach der ersten Art eine Linie, wie* GH, *gezogen, welche von* EB, FD *die Segmente* EH, FK *abschneide, deren Verhältniss gleich dem gegebenen ist. Verbinde* EG, *so ist diese Linie der Lage nach gegeben. Es wird aber auch* CD *der Lage nach gegeben, folglich ist der Punkt* N *gegeben. Weil also die Punkte* E, N, G *gegeben sind, so ist das Verhältniss* [EN : NG *und* comp.] EG : GN *bekannt. Nun ist* EG : GN *gleich dem Verhältnisse* EH *zu* NK, *folglich ist das Verhältniss* EH : NK *gegeben. Es wird aber das Verhältniss* EH : FK *gegeben, daher auch das Verhältniss* FK : NK, *mithin* divid. FN : NK. *Da nun die Linie* FN *der Grösse nach gegeben ist, so ist es auch* NK; *wegen des bekannten Punktes* N *ist also auch der Punkt* K *und somit die Linie* GKH *der Lage nach gegeben.*

Determination. Weil aber die Linie NK *kleiner ist als* FK, *so ist das Verhältniss* EH : NK, *oder* EG : GN *grösser als* EH : FK, *das ist, als das gegebene Verhältniss. Es muss also das gegebene Verhältniss kleiner als* EG : GN *seyn.*

Synthesis. Verbinde EG, *so muss das gegebene Verhältniss kleiner als* EG : GN *seyn. Es sey*

also gleich dem Verhältnisse m : no. *Wie nun* EG *zu* GN *sich verhält, so verhalte sich* m *zu* np, *welche Linie kleiner als* no *seyn wird; alsdann mache wie* op *zu* pn, *so* FN *zu* NK; *verbinde und verlängere* GK: *so behaupte ich, dass die Linie* GKH *allein die Aufgabe löse. Diess wird so bewiesen. Weil* FN : NK = op : pn, *so ist* comp. FK : KN = on : np *und* invert. NK : KF = pn : no.
Da nun EG : GN = EH : NK,
so ist auch . . . . . . EH : NK = m : np.
Es ist aber . . . . NK : KF = pn : no,
folglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : no. *Es ist also aus dem Punkte* G *eine Linie* GH *gezogen, welche die Segmente* EH, FK *abschneidet, deren Verhältniss dem gegebenen gleich ist. Folglich löst die Linie* GH *die Aufgabe. Ich behaupte aber, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich leiste eine andere dasselbe, wie* GP. *Die Linie* GP *schneidet also das Verhältniss* EP : FQ *gleich dem gegebenen ab. Weil aber* KN < KF, *so ist* QK : KN > QK : KF *und* comp. QN : NK > QF : FK. *Es ist aber* QN : NK = PE : EH, *also* PE : EH > QF : FK *und* perm. EP : FQ > EH : FK. *Nun ist aber bewiesen, dass die Linie* GH *die Aufgabe löse, und die andere leistet dieses nicht; folglich löst jene die Aufgabe allein.*

Es ist also klar, dass die dem Punkte F *näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren.*

Cas. II. Fig. 2. *Analysis. Es werde nach der zweiten Art die Linie* GH *gezogen, welche von* EA, FD *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Verbinde* GE, *so ist diese Linie der Lage nach gegeben; aber auch* CD, *mithin der Punkt* N, *daher auch die Linien* GE, GN, *und somit das Verhältniss* EG : GN. *Es ist aber* EG : GN = EH : NK, *folglich ist das Verhältniss* EH : NK *gegeben. Nun*

ist das Verhältniss EH : FK *gegeben, mithin auch* FK : KN *und* comp. FN : NK; *folglich, weil die Linie* FN *der Grösse nach gegeben ist, ist es auch* NK. *Der Punkt* N *ist aber bekannt, also auch der Punkt* K, *und somit ist wegen des gegebenen Punktes* G *die Linie* GKH *der Lage nach gegeben. Weil aber* KN *sowohl gleich seyn kann* KF, *als auch grösser oder kleiner, so findet keine Gränze statt.*

Synthesis. Verbinde GE, *und das gegebene Verhältniss sey gleich* m : no. *Mache* m : np = EG : GN *und* FN : NK = op : pn, *verbinde* GK *und verlängere sie nach* H, *so behaupte ich, dass die Linie* GH *die Aufgabe löse, oder dass* EH : FK = m : no *sey. Denn weil* EG : GN = EH : NK *und auch* = m : pn, *so ist*

EH : NK = m : pn.

Ferner, weil op : pn = FN : NK, *ist* divid. *und* invert.

NK : KF = pn : no.

Folglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : no. *Die Linie* GH *löst also die Aufgabe. Ich behaupte aber, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere, wie* GP, *welche das Verhältniss* EP : FQ *gleich dem gegebenen abschneide. Aber* PE *ist grösser als* EH, *und* QF *kleiner als* FK, *also das Verhältniss* EP : FQ *grösser als das Verhältniss* EH : FK; *folglich schneidet die Linie* GP *ein grösseres Verhältniss ab als* GH.

Es ist also klar, dass die dem Punkte F *näheren geraden Linien grössere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren.*

Cas. III. Fig. 3. *Analysis. Es werde nun nach der dritten Art die Linie* GH *gezogen, welche von den Linien* EA, FC *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Verbinde* GE, *so ist diese Linie der Lage nach gegeben. Weil nun* CD *der Lage nach gegeben ist, so ist auch der Punkt* N *und das Verhältniss* EG : GN *gegeben. Es ist*

aber EG : GN = EH : NK, *daher ist auch das Verhältniss* EH : NK *bekannt. Nun wird aber das Verhältniss* EH : FK *gegeben; folglich ist auch* NK : FK *und* divid. NF : FK *gegeben. Da nun* NF *bekannt ist, so ist* FK *der Lage und Grösse nach bekannt. Der Punkt* F *wird aber gegeben, also auch der Punkt* K, *und weil der Punkt* G *gegeben ist, so ist auch die Linie* GKH *der Lage nach gegeben.*

Determination. Weil FK < KN, *so ist* EH : FK > EH : KN. *Es ist aber* EH : KN = EG : GN, *folglich ist* EH : FK > EG : GN. *Das gegebene Verhältniss muss also grösser als* EG : GN *seyn.*

Synthesis. Verbinde EG, *so muss das gegebene Verhältniss grösser als* EG : GN *seyn. Es sey also das Verhältniss* m : no *grösser als* EG : GN. *Mache* m : np = EG : GN *und* NF : FK = po : on, *verbinde* GK *und verlängere sie nach* H: *so behaupte ich, dass die Linie* GKH *die Aufgabe löse. Denn weil* NF : FK = po : on, *so ist* comp.

NK : KF = pn : no.

Ferner weil EG : GN *oder*

EH : NK = m : np,

und . . . . NK : KF = pn : no,

so ist aus dem Gleichen EH : FK = m : no. *Die Linie* GH *löst also die Aufgabe; ich behaupte aber auch, allein. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie, wie* GP, *welche das Verhältniss* EP : FQ *gleich dem gegebenen abschneide. Weil aber* FK < KN, *so ist* QK : KF > QK : KN *und* comp. QF : FK > QN : NK. *Nun ist* QN : NK = PE : EH, *folglich* PE : EH < QF : FK *und* perm. EP : FQ < EH : FK. *Die Linie* GH *schneidet also ein grösseres Verhältniss als* GP *ab.*

Die dem Punkte F *näheren geraden Linien schneiden daher grössere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren.*

Wir haben also das Problem nach allen Arten aufgelöst *) *und die Construction desselben gezeigt. Ziehe die Linie* EG: *so wird das gegebene Verhältniss entweder kleiner seyn als* EG : GN, *oder ihm gleich, oder endlich grösser. Ist nun das gegebene Verhältniss kleiner als* EG : GN, *so wird die Aufgabe nach zwei Arten gelöst, nämlich nach der ersten und zweiten; aber nicht nach der dritten, weil das gegebene Verhältniss nicht grösser ist als* EG : GN. *Ist das gegebene Verhältniss gleich* EG : GN, *so wird nach der zweiten Art construirt werden; nicht aber nach der ersten, weil das gegebene Verhältniss nicht kleiner ist als* EG : GN; *auch nicht nach der dritten, weil es nicht grösser als dasselbe ist. Endlich wenn das gegebene Verhältniss grösser als* EG : GN *ist, so kann die Aufgabe offenbar nach zwei Arten gelöst werden, nämlich nach der zweiten und dritten; nicht aber nach der ersten, weil das gegebene Verhältniss nicht kleiner als* EG : GN *ist.*

Fall 2.

Es sey nun der gegebene Punkt innerhalb der Winkel *BEF*, *EFD*, wie der Punkt *G*, und die durch den Punkt *G* gezogenen Linien schneiden den Punkten *E*, *F* anliegende Segmente ab, deren Verhältniss gleich dem gegebenen sey. Diess kann aber auf drei Arten geschehen. Entweder nämlich liegen die Abschnitte in *EB*, *FD*; oder in *EA*, *FD*; oder endlich in *EB*, *FC*.

Cas. I. Fig. 4. *Analysis. Es werde also nach der ersten Art eine Linie, wie* HK, *gezogen, welche von* EB, FD *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Verbinde* EG *und verlängere sie nach* N: *so ist die Linie* EN *der Lage nach gegeben;*

---

*) Resolvimus *d. i. wir haben die Analysis gemacht.*

aber auch CD, *mithin ist der Punkt* N *und das Verhältniss* EG : GN *gegeben. Es ist aber* EG : GN = EH : NK, *und das Verhältniss* EH : FK *wird gegeben; folglich ist aus dem Gleichen* FK : KN *und* comp. FN : NK *gegeben. Die Linie* FN *ist aber der Grösse nach gegeben, also auch* NK *sowohl der Grösse als Lage nach. Da nun der Punkt* N *gegeben ist, so ist es auch der Punkt* K; *folglich ist wegen des gegebenen Punktes* G *auch die Linie* HGK *der Lage nach gegeben.*

Weil aber jede von den Linien FK, KN *grösser als die andere seyn kann, so findet hier keine Gränze statt.*

Synthesis. Verbinde EG *und verlängere sie nach* N. *Das gegebene Verhältniss sey* m : no. *Mache* m : np = EG : GN, *und* NK : KF = pn : no. *) *Verbinde* KG *und verlängere sie; ich behaupte, dass die Linie* KGH *die Aufgabe löse. Denn weil* EG : GN, *das ist,*

EH : KN = m : np
und . . . . NK : KF = pn : no

nach der Construction: so ist aus dem Gleichen EH : FK = m : no. *Folglich löst* HK *die Aufgabe. Ich behaupte ausserdem, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie, wie* PGQ. **) *Weil aber* EH > EP *und* FK < FQ, *so ist* EH : FK > EP : FQ; *mithin schneidet die Linie* HK *ein grösseres Verhältniss als* PQ *ab.*

Die dem Punkte F *näheren geraden Linien schneiden also grössere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren.*

---

*) *Mit der Analysis übereinstimmend müsste es heissen: und* FN : NK = op : pn.

**) *Ergänze: welche dasselbe leiste, d. h. welche ein dem gegebenen gleiches Verhältniss abschneide. Diese Bemerkung gilt auch für mehrere ähnliche Stellen weiter unten.*

Cas. II. Fig. 5. *Analysis. Hierauf werde nach der zweiten Art eine Linie* HK *gezogen, welche von* EA, FD *das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Verbinde* EG *und verlängere sie nach* N: *so ist die Linie* EN *der Lage nach gegeben. Es ist aber auch die Linie* CD *der Lage nach gegeben, folglich ist der Punkt* N *und somit das Verhältniss* EG : GN *gegeben. Nun ist* EG : GN = EH : NK *und das Verhältniss* EH : FK *wird gegeben, folglich ist auch das Verhältniss* FK : NK *und* divid. FN : NK *gegeben. Es ist aber* FN *der Grösse nach gegeben, also auch* NK *der Grösse und Lage nach. Wegen des gegebenen Punktes* N *ist also der Punkt* K *und, weil auch der Punkt* G *gegeben wird, die Linie* HGK *der Lage nach gegeben.*

Determination. Weil aber FK > KN, *so ist* EH : KN, *das ist,* EG : GN > EH : FK. *Das zur Construction gegebene Verhältniss muss daher kleiner als* EG : GN *seyn.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : no *und kleiner als* EG : GN. *Mache* m : np = EG : GN *und* FK : KN = on : np, *) *verbinde* GK *und verlängere sie: so behaupte ich, dass die Linie* KGH *die Aufgabe löse. Denn weil* EG : GN, *das ist*

EH : NK = m : np

und . . . . NK : KF = pn : no,

so ist aus dem Gleichen EH : FK = m : no. *Folglich löst* HK *die Aufgabe; ich behaupte aber, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine beliebige andere Linie, wie* PQ. *Weil nun* FK > NK, *so ist* QK : KF < QK : KN *und* comp. FQ : FK < QN : NK. *Es ist aber* QN : NK = PE : EH; *folglich ist* FQ : FK < PE : EH *und* perm. FQ : EP < FK : EH. *Die Linie* HK *löst also allein die Aufgabe.*

*) *Mit der Analysis übereinstimmend müsste es heissen: und* FN : NK = op : pn.

Hieraus geht hervor, dass die dem Punkte F *näheren geraden Linien grössere* *) *Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren.*

Cas. III. Fig. 6. *Analysis. Es sey endlich nach der dritten Art die Linie* HK *gezogen, welche von* EB, FC *das dem gegebenen gleiche Verhältniss* EH : FK *abschneide. Verbinde* EG *und verlängere sie nach* N *in der Linie* CD. *Es ist also die Linie* EN *der Lage nach gegeben, somit der Punkt* N *und, weil auch die Punkte* E, G *gegeben werden, das Verhältniss* EG : GN. *Weil nun* EG : GN = EH : NK, *so ist auch das Verhältniss* EH : NK *gegeben. Es wird aber das Verhältniss* EH : FK *gegeben, daher ist das Verhältniss* NK : KF *und* divid. NF : FK *ebenfalls bekannt. Weil nun die Linie* NF *gegeben ist, so ist es auch* FK *der Grösse und Lage nach. Wegen des gegebenen Punktes* F *ist also der Punkt* K *und desshalb die Linie* HGK *der Lage nach gegeben.*

Determination. Weil aber FK < KN, *ist* EH : FK > EH : KN. *Nun ist* EH : KN = EG : GN, *mithin* EH : FK > EG : GN. *Es ist aber* EH : FK *gleich dem gegebenen Verhältnisse. Folglich muss das zur Construction gegebene Verhältniss grösser als* EG : GN *seyn.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss m : no *sey grösser als* EG : GN. *Mache* m : np = EG : GN *und* NF : FK = po : on, *verbinde* GK *und verlängere sie: ich behaupte, dass die Linie* KGH *die Aufgabe löse. Denn weil* NF : FK = po : on, *so ist* comp.

NK : KF = pn : no.

Es ist aber EG : GN, *das ist*

EH : NK = m : np,

folglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : no. *Die*

---

*) *Es muss heissen: kleinere, weil* EH *als Vorderglied des abzuschneidenden Verhältnisses zu betrachten ist.*

Linie HK *löst also die Aufgabe. Ich behaupte auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie, wie* PQ. *Weil nun* NK > KF, *so ist* QK : KN < QK : KF *und* comp. QN : NK < QF : FK. *Es ist aber* QN : NK = PE : EH, *folglich* PE : EH < QF : FK, *und* perm. EP : FQ < EH : FK. *Die Linie* HK *löst also allein die Aufgabe.*

Es ist also klar, dass die dem Punkte F *näheren geraden Linien grössere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren.*

Wir haben also die Auflösung und auch die Construction des Problems nach seinen drei Arten gefunden. Verbinde EG *und verlängere sie nach* N: *so ist das gegebene Verhältniss entweder gleich* EG : GN *oder grösser oder kleiner. Ist es gleich dem Verhältnisse* EG : GN, *so wird die Aufgabe nur auf eine Weise gelöst werden und zwar nach der ersten Art; nämlich nicht nach der zweiten, weil das gegebene Verhältniss nicht kleiner ist als* EG : GN; *auch nicht nach der dritten, weil es nicht grösser ist als* EG : GN. *Ferner wenn das gegebene Verhältniss kleiner ist als* EG : GN, *so wird das Problem nach zwei Arten construirt werden, nämlich nach der ersten und zweiten; nicht aber nach der dritten, weil das Verhältniss nicht grösser ist als* EG : GN. *Endlich wenn das gegebene Verhältniss grösser ist als* EG : GN, *so wird die Aufgabe nach zwei Arten gelöst, nach der ersten und dritten; nicht aber nach der zweiten, weil das gegebene Verhältniss nicht kleiner ist als* EG : GN.

Fall 3.

Die der Lage nach gegebenen geraden Linien *AB*, *CD* schneiden einander im Punkte *M* und in beiden werde der gemeinschaftliche Punkt *M* genommen. Der gegebene Punkt aber wird entweder im ∠ *DMB* oder in seinem Nebenwinkel liegen. Für jeden Winkel findet

jedoch dieselbe Construction wie im $\angle$ *DMB* statt. Es sey daher der Punkt *G* im Winkel *DMB* gegeben und es werde verlangt gerade Linien aus *G* zu ziehen, welche von den durch *M* gehenden Linien Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneiden. Diess kann aber auf drei Arten geschehen; entweder nämlich wird das Verhältniss von *AM*, *MD*; oder von *CM*, *MB*; oder endlich von *BM*, *MD* abgeschnitten.

Cas. I. Fig. 7. *Analysis. Es werde also erstlich eine Linie* GK *nach der ersten Art gezogen, welche von* AM, MD *das Verhältniss* MH : MK *gleich dem gegebenen abschneide. Durch den Punkt* G *ziehe eine Linie mit* MD *parallel bis nach* L*: so ist* GL *der Lage nach gegeben. Aber auch* AB *wird der Lage nach gegeben, folglich ist der Punkt* L *gegeben. Weil aber das Verhältniss* MH : MK *gegeben ist, so ist es auch das Verhältniss* GL : LK. *Da nun* GL *bekannt ist, so ist auch* LK *der Grösse und Lage nach bekannt, und wegen des gegebenen Punktes* L *auch der Punkt* K. *Es wird aber der Punkt* G *gegeben, folglich ist die Linie* GK *der Lage nach gegeben.*

Determination. Es ist offenbar, dass das gegebene Verhältniss kleiner seyn müsse als GL : LM.

Synthesis. Ziehe GL $\ddagger$ CD *und das gegebene Verhältniss* m : n *sey kleiner als* GL : LM. *Mache* GL : LK = m : n *und verbinde* GK; *ich behaupte, dass die Linie* GK *die Aufgabe löse. Denn weil* GL : LK = MH : MK *und auch* = m : n, *so ist* MH : MK = m : n. *Die Linie* GK *löst also die Aufgabe. Ich behaupte ausserdem, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie wie* GQ. *Weil* KL < LQ, *so ist* GL : LK > GL : LQ. *Es ist aber* GL : LK = MH : MK *und* GL : LQ = MP : MQ; *folglich ist* MH : MK > MP : MQ. *Daher schneidet*

GQ *nicht ein Verhältniss ab, das dem gegebenen gleich ist. Aus demselben Grunde folgt, dass keine andere Linie, ausser* GK *allein, die Aufgabe löse.*

Offenbar schneiden die dem Punkte M *näheren geraden Linien grössere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren.*

Cas. II. Fig. 8. *Analysis. Es sey nun nach der zweiten Art eine Linie, wie* GH, *gezogen, welche von* CM, MB *ein Verhältniss gleich dem gegebenen abschneide. Durch* G *sey die Linie* GL *mit* CD *parallel gezogen: so wird* GL *der Lage nach gegeben seyn und, weil* AB *der Lage nach gegeben ist, auch der Punkt* L. *Es ist aber das Verhältniss* MH : MK *gegeben, mithin auch das Verhältniss* GL : LK. *Da nun* GL *bekannt ist, so ist es* LK *der Grösse und Lage nach. Wegen des gegebenen Punktes* L *ist also der Punkt* K, *mithin, weil der Punkt* G *gegeben wird, die Linie* GKH *der Lage nach gegeben.*

Determination. Es ist offenbar, dass das gegebene Verhältniss grösser als GL : LM *seyn müsse.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss m : n *sey grösser als* GL : LM. *Mache* GL : LK = m : n, *verbinde* GK *und verlängere sie nach* H. *Ich behaupte, dass die Linie* GH *die Aufgabe löse und zwar allein. Denn weil* GL : LK = MH : MK, *so ist* MH : MK = m : n. *Die Linie* GH *löst also die Aufgabe. Ich behaupte aber auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie, wie* GP. *Weil nun* LQ < LK, *so ist* GL : LQ > GL : LK. *Es ist aber* GL : LQ = MP : MQ *und* GL : LK = MH : MK; *folglich ist* MP : MQ *grösser als* MH : MK, *mithin dem gegebenen Verhältnisse nicht gleich. Die Linie* GP *löst also die Aufgabe nicht. Aus demselben Grunde erhellet, dass keine andere Linie ausser* GH *der Aufgabe genüge.*

Die dem Punkte M *näheren geraden Linien schneiden offenbar kleinere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren.*

Cas. III. Fig. 9. *Analysis.* *Es sey endlich nach der dritten Art eine Linie, wie* HK, *gezogen, welche von* BM, MD *ein dem gegebenen gleiches Verhältniss abschneide. Ziehe die Linie* GL ⫲ CD, *so wird sie der Lage nach gegeben seyn. Es ist aber die Linie* MB *der Lage nach gegeben, also auch der Punkt* L. *Da nun das Verhältniss* MH : MK *gegeben ist, so ist es auch das Verhältniss* GL : LK. *Es ist aber* GL *der Grösse nach gegeben, daher ist* LK *der Grösse und Lage nach bekannt. Wegen des gegebenen Punktes* L *ist also der Punkt* K, *mithin, weil auch der Punkt* G *gegeben wird, die Linie* KGH *der Lage nach gegeben. Das Verhältniss ist aber nicht begränzt, weil* ML *gleich seyn kann der* LK, *oder grösser oder kleiner.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey gleich m : n. *Mache* GL : LK = m : n, *verbinde* GK *und verlängere sie nach* H; *ich behaupte, dass* HK *die Aufgabe löse. Denn weil* GL : LK *) = m : n, *ist auch* MH : MK = m : n; *folglich löst* HK *die Aufgabe. Ich behaupte auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere, wie* PQ. *Weil nun* MP > MH, *aber* MQ < MK, *so ist* MP : MQ *grösser als* MH : MK, *also dem gegebenen nicht gleich. Hieraus geht hervor, dass keine andere Linie die Aufgabe löse als* HK.

Auch erhellet, dass die dem Punkte M, *in* CD *genommen, näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren.*

Wir haben also die Auflösung des Problems nach allen Arten gefunden und die Construction des-

*) Hactenus pertigit Traductio D. Bernardi. Halley.

selben gezeigt. Es bleibe die Figur nebst der Parallele GL: *so wird das gegebene Verhältniss entweder kleiner seyn als* GL : LM; *oder grösser, oder eben so gross. Ist es kleiner als* GL : LM; *so wird das Problem nach zwei Arten construirt werden, nämlich nach der ersten und dritten; nicht aber nach der zweiten, weil das gegebene Verhältniss nicht grösser ist als* GL : LM. *Ist es grösser als* GL : LM, *so wird die Aufgabe nach zwei Arten gelöst, nämlich nach der zweiten und dritten; nicht aber nach der ersten, weil das Verhältniss nicht kleiner als* GL : LM *ist. Wenn aber das gegebene Verhältniss gleich ist* GL : LM, *so kann nur nach einer Art construirt werden, nämlich nach der dritten; nicht aber nach der ersten, weil das Verhältniss nicht kleiner ist als* GL : LM; *auch nicht nach der zweiten, weil es nicht grösser als dasselbe ist.*

Fall 4.

Die Linien *AB*, *CD* schneiden einander in *M*; in *AB* werde der Punkt *F*, in *CD* aber der Punkt *M* genommen. Der gegebene Punkt wird nun entweder im Winkel *DMB*, oder im Winkel *AMD*, oder in den Nebenwinkeln derselben liegen. Er liege also zuerst im Winkel *DMB*, wie der Punkt *G*; und es werde verlangt aus dem Punkte *G* Linien zu ziehen, welche von den Linien *CD*, *AB* den Punkten *M*, *F* anliegende Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneiden. Diess kann aber auf vier verschiedene Arten geschehen; entweder nämlich werden die Segmente in *MD*, *FA*; oder in *MD*, *FM*; oder in *MC*, *FB*; oder endlich in *MD*, *FB* genommen.

Cas. I. Fig. 10. *Analysis. Es werde nun nach der ersten Art die Linie* GK *gezogen, welche von* MD, FA *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem*

gegebenen abschneide. Ziehe die Linie GL *mit* CD *parallel, so ist der Punkt* L *gegeben; und mache* GL : FO = MH : FK. *Da der Punkt* F *gegeben ist, so ist es auch der Punkt* O; *und da der Punkt* L *bekannt ist, so ist die Linie* LO *gegeben. Weil nun* GL : FO = MH : FK, *so ist* perm. GL : MH = FO : FK. *Es ist aber* GL : MH = LK : KM; *folglich ist* LK : KM = OF : FK *und* convert. KL : LM = FO : OK, *mithin* ▭ LKO = ▭ LM . FO. *Daher ist* ▭ LKO *gegeben. Es ist also an einer gegebenen Linie, nämlich an* LO, *ein Rechteck gleich einem gegebenen zu entwerfen, dessen Ergänzung ein Quadrat sey*), wodurch man die Linien* LK, KO *erhält. Daher ist der Punkt* K *bekannt; und da der Punkt* G *gegeben ist, so ist* GK *der Lage nach gegeben.*

Es ist aber einleuchtend, dass diese Entwerfung immer möglich sey, weil in der Construction an der Linie LO *ein Rechteck gleich* ▭ LM . FO *zu entwerfen ist, dessen Ergänzung ein Quadrat sey. Denn* ▭ LFO *ist grösser als* ▭ LM . FO.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Mache* GL : FO = m : n *und entwirf an* LO *ein Rechteck gleich* ▭ LM . FO, *dessen Ergänzung ein Quadrat sey. Dieses Rechteck sey* LKO. *Verbinde* GK; *ich behaupte, dass die Linie* GK, *und zwar allein, die Aufgabe löse, oder dass* MH : FK = m : n *sey. Denn weil* ▭ LKO = ▭ LM . FO, *so ist* KL : LM = FO : OK *und* convert. LK : KM = OF : FK. *Es ist aber* LK : KM = GL : MH, *folglich ist* GL : MH = OF : FK *und* perm. GL : FO = MH : FK; *und da* GL : FO = m : n, *so ist* MH : FK = m : n. *Folglich löst* GK *die Aufgabe. Ich behaupte auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie, wie* GQ. *Weil*

*) *d. h. es ist eine Linie* LO *zwischen ihren Endpunkten so zu theilen, dass das Rechteck der Abschnitte einem gegebenen gleich sey.*

aber ▭LFO > ▭LKO, *so ist* ▭LKO > ▭LQO *). *Da nun* ▭LKO *gleich ist dem Rechtecke* LM . FO, *so ist das Rechteck* LM . FO *grösser als das Rechteck* LQ . QO; *folglich ist* QL : LM < FO : OQ *und* convert. LQ : QM > OF : FQ. *Es ist aber* LQ : QM = GL : MP, *also* GL : MP > OF : FQ *und* perm. GL : FO > MP : FQ. *Nun ist* GL : FO = m : n, *mithin ist* m : n > MP : FQ, *wesshalb die Linie* GQ *die Aufgabe nicht löst.*

Die dem Punkte M *näheren geraden Linien schneiden grössere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren.*

Cas. II. Fig. 11. *Analysis. Es werde nun nach der zweiten Art eine Linie, wie* GK, *gezogen, welche von* MD, FM *Segmente* MH, FK *in dem gegebenen Verhältnisse abschneide. Durch den gegebenen Punkt* G *ziehe der* CD *die Linie* GL *parallel und mache* GL : FO = MH : FK. *Weil nun* GL *bekannt ist, so ist es auch* FO *der Grösse und Lage nach; wegen des gegebenen Punktes* F *ist also der Punkt* O *gegeben. Da nun* GL : FO = MH : FK, *so ist* perm. GL : MH = FO : FK. *Es ist aber* GL : MH = LK : KM, *folglich ist* FO : FK = LK : KM *und* convert. FO : OK = KL : LM, *mithin* ▭LM . FO = ▭LKO. *Nun ist* ▭LM . FO *gegeben, also auch* ▭LKO, *welches an einer gegebenen geraden Linie, nämlich* LO, *so zu entwerfen ist, dass der Überschuss ein Quadrat sey* **). *Es ist also der Punkt* K *gegeben und wegen des gegebenen Punktes* G *auch die Linie* GK *der Lage nach.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Mache* GL : FO = m : n *und entwirf an der Linie* LO

---

*) *Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck. Lemma* 8 *Zusatz. — Wird* Q *zwischen* K, F *genommen, so ist* ▭LKO < ▭LQO.

**) *d. h. die Linie* LO *ist in der Verlängerung so zu theilen, dass das Rechteck der Abschnitte einem gegebenen gleich sey.*

ein dem $\square$ LM . FO *gleiches Rechteck, dessen Überschuss ein Quadrat sey, nämlich das* $\square$ LKO. *Weil nun* $\square$ LFO $>$ $\square$ LM . FO, *und* $\square$ LM . FO $=$ $\square$ LKO, *so wird der Punkt* K *zwischen* F, M *) *fallen. Verbinde* GK, *so behaupte ich, dass sie die Aufgabe löse* **), *und zwar allein. Denn wo möglich ziehe eine andere gerade Linie, wie* GPQ. *Weil aber* MP $>$ MH, *und* FQ $<$ FK, *so ist* MP : FQ $>$ MH : FK; *folglich löst* GK *die Aufgabe allein.*

Die dem Punkte M *näheren geraden Linien schneiden kleinere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren.*

Cas. III. Fig. 12. *Analysis. Es werde jetzt nach der dritten Art eine Linie wie* GH *gezogen, welche von* MC, FB *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Durch* G *ziehe die Linie* GL *parallel mit* CD, *so ist sie der Grösse nach gegeben, und der Punkt* L *ist bekannt. Mache* GL : FO $=$ MH : FK. *Weil das Verhältniss* MH : FK *gegeben ist, so ist es auch das Verhältniss* GL : FO *und die Linie* FO *der Grösse und Lage nach. Wegen des gegebenen Punktes* F *ist also der Punkt* O *und, weil der Punkt* L *bekannt ist, auch die Linie* LO *gegeben. Da nun* GL : FO $=$ MH : FK, *so ist* perm. GL : MH $=$ OF : FK. *Es ist aber* GL : MH $=$ LK : KM, *folglich ist* LK : KM $=$ OF : FK *und* comp. LM : MK $=$ OK : KF, *also* convert. ***) ML : LK $=$ KO : OF, *daher ist* $\square$ LM . FO $=$ $\square$ LKO. *Nun ist* $\square$ LM . FO *wegen seiner bekannten Seiten gegeben; folglich ist* $\square$ LKO

*) *Genauer: so wird der Punkt* K *zwischen* F, O *fallen. Liegt nun* O *in* MB, *so ist* $\square$ LMO $<$ $\square$ LM . FO, *also* $\square$ LMO $<$ $\square$ LKO, *folglich liegt* K *in diesem, und somit in jedem, Falle zwischen* F, M.

**) *Der Beweis fehlt.*

***) *Der Schluss* convert. *konnte durch Umstellung der Verhältnisse in der ersten Proportion* GL : FO $=$ MH : FK *erspart werden.*

gegeben, an der gegebenen geraden Linie LO so zu entwerfen, dass die Ergänzung ein Quadrat sey. Daher ist der Punkt K gegeben, welcher zwischen M, L fallen wird, weil ▭ LMO grösser ist als ▭ LM . FO oder als ▭ LKO. Weil nun auch der Punkt G gegeben wird, so ist die Linie GKH der Lage nach gegeben.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. Mache GL : FO = m : n und entwirf an LO ein dem ▭ LM . FO gleiches Rechteck, dessen Ergänzung ein Quadrat sey. Dieses Rechteck sey ▭ LKO. Verbinde GK und verlängere sie nach H. Ich behaupte, dass die Linie GH die Aufgabe löse, indem sie ein Verhältniss MH : FK gleich m : n abschneide. Denn weil ▭ LM . FO = ▭ LKO, so ist ML : LK = KO : OF und convert. *) LM : MK = OK : KF, also divid. LK : KM oder GL : MH = OF : FK und perm. GL : FO = MH : FK. Es ist aber (nach der Construction) GL : FO = m : n, also ist MH : FK = m : n und GH löst die Aufgabe. Ich behaupte auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie wie GP. Schneidet nun diese Linie GP ein Verhältniss gleich dem gegebenen oder gleich m : n ab, so ist MH : FK = MP : FQ. Es ist aber MH : FK = GL : FO, folglich ist GL : FO = MP : FQ und perm. GL : MP = OF : FQ. Da nun GL : MP = LQ : QM, so ist LQ : QM = OF : FQ, also compon. und convert. ML : LQ = QC : OF, mithin ▭LM . FO = ▭LQO. Aber es ist ▭LM . FO = ▭LKO, folglich ist ▭ LKO = ▭ LQO, welches nicht möglich ist **). Daher löst die Linie GH allein die Aufgabe.

---

*) Der Schluss convert. ist sowohl hier als noch zweimal weiter unten ganz überflüssig. Weil ML : LK = KO : OF, so ist divid. MK : KL oder MH : GL = KF : FO und perm. MH : FK = GL : FO = m : n.

**) Wäre ▭ LKO = ▭ LQO, so läge die Mitte der LO zwischen K, Q; also würde seyn ▭ LKO > ▭ LMO

Angenommen aber, dass das Rechteck $LK . KO$ oder das Rechteck $LM . FO$ kleiner sey als ▭LQO *), so ist $ML : LQ < QO : OF$, also convert. $LM : MQ > OQ : QF$ und divid. $LQ : QM > OF : FQ$. Es ist aber $LQ : QM = GL : MP$, folglich ist $GL : MP > OF : FQ$ und perm. $GL : FO > MP : FQ$. Nun ist $GL : FO = MH : FK$, folglich $MH : FK > MP : FQ$. Die Linie GH schneidet also ein grösseres Verhältniss ab als GP, woraus erhellet, dass

die dem Punkte M näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren.

Cas. IV. Fig. 13. *Analysis.* Es werde endlich nach der vierten Art eine Linie, wie HK, gezogen, welche von MD, FB ein Verhältniss gleich dem gegebenen, nämlich das Verhältniss $MH : FK$, abschneide. Ziehe der CD eine Parallele, wie GL: so ist sie der Grösse und Lage nach gegeben, also der Punkt L. Weil aber das Verhältniss $MH : FK$ gegeben wird, so werde demselben das Verhältniss $GL : FO$ gleich gemacht. Da also das Verhältniss $GL : FO$ und die Linie GL gegeben ist: so ist auch FO gegeben sowohl der Grösse als Lage nach. Wegen des bekannten Punktes F ist also der Punkt O, mithin wegen des gegebenen Punktes L die Linie LO gegeben. Weil

---

und um so mehr ▭$LKO >$ ▭$LM . FO$ gegen die Construction.

*) d. h. angenommen, der Punkt Q liege zwischen M, K; denn dann ist ▭$LQO >$ ▭LKO. Weil nämlich ▭$LMO >$ ▭LKO, so ist M der Mitte der LO näher als K und die Mitte liegt zwischen O, K. Ist nun die Mitte zwischen Q, K, so wird, weil M der Mitte näher als K ist, gewiss auch Q der Mitte näher als K seyn. Dasselbe ist an sich klar, wenn die Mitte in OQ liegt; folglich ist in jedem Falle ▭$LQO >$ ▭LKO (Pappi Lemma 14).

nun MH : FK = GL : FO, so ist perm. MH : GL oder MK : KL = KF : FO und divid. ML : LK = KO : OF, also ▭ LM . FO = ▭ LKO. Es ist aber ▭ LM . FO gegeben, also auch ▭ LKO, welches an der bekannten LO so zu entwerfen ist, dass der Ueberschuss ein Quadrat sey. Folglich ist der Punkt K, mithin, weil die Punkte G, K gegeben sind, die Linie KGH der Lage nach gegeben.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. Mache GL : FO = m : n und entwirf an LO ein dem ▭ LM . FO gleiches Rechteck, nämlich ▭ LKO, dessen Überschuss ein Quadrat sey. Verbinde KG und verlängere sie nach H. Ich behaupte, dass die Linie HK die Aufgabe löse, oder dass sie ein Verhältniss MH : FK gleich m : n abschneide. Denn weil ▭ LM . FO = ▭ LKO, ist ML : LK = KO : OF und comp. MK : KL = KF : FO. Es ist aber MK : KL = MH : GL, folglich ist MH : GL = KF : FO und perm. MH : FK = GL : FO. Nun ist GL : FO = m : n, folglich ist auch MH : FK = m : n. Die Linie HK löst also die Aufgabe; ich behaupte auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere, wie PQ. Schneidet nun diese Linie ein dem Verhältnisse m : n gleiches Verhältniss ab, so ist MP : FQ = MH : FK. Es ist aber MH : FK = GL : FO, folglich ist MP : FQ = GL : FO und perm. MP : GL = QF : FO. Nun ist MP : GL = MQ : QL, also MQ : QL = QF : FO und divid. ML : LQ = QO : OF, folglich ▭ LM . FO = ▭ LQO. Weil aber ▭ LM . FO = ▭ LKO, so ist ▭ LKO = ▭ LQO. Diess ist aber nicht möglich, folglich löst HK allein die Aufgabe.

Welche aber von jenen Linien ein grösseres Verhältniss abschneide, wird auf folgende Weise bestimmt. Weil ▭ LKO oder ▭ LM . FO grösser ist als ▭ LQO *),

---

*) Vorausgesetzt nämlich, dass Q zwischen L und K liegt. Dass aber PQ die Aufgabe nicht löse, sondern ein grösseres Verhältniss als HK ab-

so ist ML : LQ > QO : OF *und* comp. MQ : QL > QF : FO. *Es ist aber* MQ : QL = MP : GL, *also* MP : GL > QF : FO *und* perm. MP : FQ > GL : FO. *Nun ist* GL : FO = MH : FK, *folglich ist* MP : FQ > MH : FK; *mithin schneidet die Linie* HK *ein kleineres Verhältniss als* PQ *ab.*

Hieraus geht hervor, dass die dem Punkte M *näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren.*

Die Aufgabe ist also unter allen Umständen möglich und kann nach allen vorgetragenen Arten gelöst werden, aber nur auf eine Weise, denn in keiner findet eine Gränze statt.

Fall 5.

Der gegebene Punkt *G* sey im Winkel *CMA*; und wenn durch *G* eine Linie mit *AB* parallel gezogen wird, so kann der Punkt *F* in der Linie *CM* entweder jenseit oder diesseit der Parallele, oder in ihr selbst genommen werden. Er liege aber zuerst in der Parallele selbst; so lassen sich gerade Linien aus dem Punkte *G* auf drei verschiedene Arten ziehen: entweder nämlich wird das Verhältniss von *MA*, *FC*; oder von *MB*, *FM*; oder endlich von *MA*, *FD* abgeschnitten.

Cas. I. Fig. 14. *Analysis. Zuerst nun werde nach der ersten Art eine Linie gezogen, welche von* MA, FC *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Mache* GF : FO = MH : FK. *Weil also das Verhältniss* GF : FO, *und* GF *selbst gegeben ist, so ist es auch* FO. *Wegen des gegebenen Punktes* F *ist also der Punkt* O *bekannt* *). *Da nun*

---

schneide, lässt sich kürzer so zeigen: Weil MP > MH *und* FQ < FK, *so ist* MP : FQ > MH : FK (Pappi Lemma 11).

*) *Im Lat. folgt hier, so wie auch in* Cas. 2. 3. 4, *noch: „und daher ist die Linie* FO *der Grösse*

$MH : FK = GF : FO$, *so ist* perm. $MH : GF = KF : FO$. *Es ist aber* $MH : GF = MK : KF$, *folglich ist* $MK : KF = KF : FO$, *und* divid. $MF : FK = KO : OF$, *mithin* ▭ $MFO =$ ▭ FKO. *Nun ist* ▭ MFO *gegeben, also auch* ▭ FKO, *welches an der gegebenen Linie* FO *so zu entwerfen ist, dass der Überschuss ein Quadrat sey. Folglich ist der Punkt* K *bekannt; und weil der Punkt* G *gegeben wird, so ist auch die Linie* GK *der Lage nach gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $m : n$. *Mache* $GF : FO = m : n$ *und entwirf an* FO *ein dem* ▭ MFO *gleiches Rechteck, wie* ▭ FKO, *dessen Überschuss ein Quadrat sey. Verbinde* GK *und verlängere sie nach* H; *ich behaupte, dass* HK *die Aufgabe löse oder dass* $MH : FK = m : n$ *sey. Denn weil* ▭ $MFO =$ ▭ FKO, *so ist* $MF : FK = KO : OF$ *und* comp. $MK : KF$ *wie* $KF : FO$. *Es ist aber* $MK : KF$ *wie* $MH : GF$, *folglich ist* $MH : GF = KF : FO$ *und* perm. $MH : FK = GF : FO$. *Nun ist (nach der Construction)* $GF : FO = m : n$, *folglich ist* $MH : FK = m : n$ *und die Linie* HK *löst die Aufgabe. Ich behaupte auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie, wie* PQ. *Schneidet nun diese ein Verhältniss gleich* $m : n$ *ab, so ist* $MH : FK = MP : FQ$, *und da* $MH : FK = GF : FO$, *so ist* $GF : FO = MP : FQ$ *und* perm. $MP : GF = QF : FO$. *Es ist aber* $MP : GF = MQ : QF$, *folglich ist* $MQ : QF = QF : FO$, *also* divid. $MF : FQ$ *wie* $QO : OF$, *mithin Rechteck* MFO *gleich* ▭ FQO. *Nun ist* ▭ $MFO =$ ▭ FKO, *folglich ist* ▭ $FKO =$ ▭ FQO. *Diess ist aber nicht möglich, mithin löst* HK *allein die Aufgabe* *). *Weil aber*

---

und Lage nach gegeben". Diess ist ein Cirkel, denn daraus, dass FO *der Grösse und Lage nach gegeben ist, folgt erst, dass der Punkt* O *bekannt ist.*

*) *Dieser Beweis dafür, dass* PQ *die Aufgabe nicht löse, ist überflüssig, indem sich dasselbe aus*

MP > MH, *dagegen* FQ < FK, *so ist* MP : FQ > MH : FK; *die Linie* HK *schneidet daher ein kleineres Verhältniss ab als* PQ.

Die dem Punkte M *näheren geraden Linien schneiden also kleinere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren.*

Cas. II. Fig. 15. *Analysis. Es werde nun nach der zweiten Art die Linie* HK *gezogen, welche von* MB, FM *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Dem gegebenen Verhältnisse* MH : FK *gleich sey das Verhältniss* GF : FO. *Da also das Verhältniss* GF : FO *und* GF *selbst gegeben ist, so ist auch* FO *gegeben; und da der Punkt* F *gegeben wird, so ist der Punkt* O *bekannt. Weil nun* MH : FK = GF : FO, *so ist* perm. MH : GF *oder* MK : KF = KF : FO *und* comp. MF : FK = KO : OF, *also* ▭ MFO = ▭ FKO. *Entwirft man also dieses Rechteck an* FO *so, dass der Überschuss ein Quadrat ist, so erhält man den Punkt* K, *welcher immer zwischen* M, F *fallen wird* *). *Und da der Punkt* G *gegeben wird, so ist die Linie* GKH *der Lage nach gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Mache* GF : FO *gleich demselben und entwirf an* FO *ein dem* ▭ MFO *gleiches Rechteck, dessen Überschuss ein Qaadrat sey. Es sey* FKO *dieses Rechteck, verbinde* GK *und verlängere sie nach* H. *Ich behaupte, dass die Linie* GH *die Aufgabe löse oder dass* MH : FK = m : n *sey. Denn weil* ▭ MFO = ▭ FKO, *so ist* MF : FK = KO : OF *und* divid. MK : KF = KF : FO. *Es ist aber* MH : GF = MK : KF, *folglich ist* MH : GF = KF : FO *und* perm. MH : FK = GF : FO. *Nun ist*

---

dem Folgenden ergiebt. Dieselbe Bemerkung gilt auch für Cas. II.

*) *Weil* ▭ MFO *oder* ▭ FKO *kleiner ist als* ▭ FMO.

GF : FO = m : n, *also* MH : KF = m : n *und die Linie* GH *löst die Aufgabe. Ich behaupte auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie wie* GP. *Schneidet nun die Linie* GP *ein Verhältniss gleich* m : n *ab, so ist* MH : FK = MP : FQ *und, weil* MH : FK = GF : FO, *auch* MP : FQ = GF : FO *und* perm. MP : GF = QF : FO. *Es ist aber* MP : GF = MQ : QF, *also* MQ : QF = QF : FO *und* comp. MF : FQ = QO : OF, *mithin* ▭ MFO = ▭ FQO. *Diess ist aber nicht möglich, weil wir* ▭ FKO *gleich* ▭ MFO *gemacht haben; folglich löst die Linie* GH *allein die Aufgabe. Weil aber* MP > MH, *dagegen* FQ < FK, *so ist klar, dass die Linie* GH *ein kleineres Verhältniss als* GP *abschneide.*

Die dem Punkte M *näheren geraden Linien schneiden also kleinere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren.* *)

Cas. III. Fig. 16. *Analysis. Es werde nun nach der dritten Art die Linie* GK *gezogen, welche von* MA, FD *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Weil das Verhältniss* MH : FK *gegeben ist, so sey ihm gleich das Verhältniss* GF : FO. *Da nun die Linie* GF *gegeben ist, so ist es auch* FO; *und da der Punkt* F *gegeben wird, so ist auch der Punkt* O *gegeben. Weil also* MH : FK = GF FO, *so ist* perm. MH : GF = KF : FO. *Es ist aber* MH : GF = MK : KF, *folglich ist* MK : KF = KF : FO, *also* invert. **) *und* convert. KF : FM = FO : OK, *mithin* ▭ MFO = ▭ FKO. *Nun ist* ▭ MFO *wegen seiner bekannten Seiten gegeben, also auch* ▭ FKO. *Entwirft man also dasselbe an der Linie* FO *so dass die Ergänzung ein Quadrat ist: so erhält man den Punkt* K.

---

*) *Dieser Satz fehlt im Lateinischen.*

**) *Der Schluss* invertendo *konnte erspart werden, wenn die Verhältnisse der ersten Proportion umgestellt wurden.*

Und weil der Punkt G *gegeben wird, so ist auch die Linie* GK *der Lage nach gegeben.*

Determination. Weil aber zur Construction erfordert wird, dass das Verhältniss GF : FO *gleich dem gegebenen gemacht und an der Linie* FO *ein dem* □ MFO *gleiches Rechteck, nämlich* □ FKO, *entworfen werde, dessen Ergänzung ein Quadrat sey: so wird der Punkt* K *in der Linie* MO *liegen und es wird* GK *die gesuchte gerade Linie seyn, welche die Aufgabe löst. Aber nicht immer ist es möglich eine solche Linie zu ziehen, sobald nämlich* □ MFO *grösser ist als das Quadrat der halben* FO, *weil dann die Entwerfung nicht geschehen kann. Daher ist die Construction des Problems nicht immer und in allen Fällen* *) *möglich. Nur auf eine Weise* **) *aber geschieht sie, wenn die gesuchte gerade Linie der* FO *im Punkte* K *in ihrer Mitte begegnet und das* □ MFO *gleich ist* □ FKO *und so der Aufgabe genügt wird.*

Dieses Gränzverhältniss wird aber bestimmt, wenn wir ein solches Verhältniss der gegebenen GF *zur gesuchten* FO *nehmen, dass nach Halbirung der* FO *im Punkte* K *das* □ MFO *gleich sey dem* □ FKO. *Diess erreichen wir aber, wenn wir in* FD *einen Punkt* O *finden, so dass nach Halbirung der* FO *im Punkte* K *das* □ MFO *gleich* □ FKO *ist. Es sey geschehen. Weil also* □ MFO = □ FKO, *so ist* FO : OK = KF : FM. *Nun ist* FO *das Doppelte der* OK, *also ist auch* KF *das Doppelte der* FM, *und* KM = MF. *Die Linie* MF *ist aber gegeben, also auch* KM *der*

---

*) in omni casu *d. h. bei jeder beliebigen Beschaffenheit des gegebenen Verhältnisses.*

**) Fit autem modo singulari *vielleicht die Übersezzung von* μοναχμὸς, *derjenige Fall, wo das Datum die Gränze erreicht und desshalb auch nur eine Auflösung gestattet.*

Grösse und Lage nach. Wegen der gegebenen Punkte M, K *und* F *ist also* FK *gegeben, welcher* KO *gleich ist, mithin ist* KO *der Grösse und Lage nach gegeben. Wegen des gegebenen Punktes* K *ist also der Punkt* O *gegeben. Der gesuchte Punkt also, welcher das Gränzverhältniss bestimmt, ist der Punkt* O. *Ich behaupte ausserdem, dass, wenn* GK *verbunden wird,* MH : FK = GF : FO *sey. Denn die Linie* KM *ist die Hälfte von* FK, *wie* FK *die Hälfte von* FO; *folglich ist* OF : FK = FK : KM *das ist* = GF : MH *und* perm. GF : FO = MH : FK. *Man erhält also jenes äusserste Verhältniss, wenn* KM *gleich* MF *gemacht und* GK *verbunden wird.*

Es ist nun aber zu untersuchen, ob diese Linie GK *ein grösseres oder kleineres Verhältniss abschneide als jede andere aus* G *nach* MA, FD *gehende Linie. Diess wird auf folgende Weise bestimmt.*

Mache KM = MF *und verbinde* GK: *so ist zu untersuchen, ob die Linie* GK *ein grösseres* *) *Verhältniss* MH : FK *als jede andere Linie abschneide, die aus* G *nach* MA, FD *gezogen wird. Mache* OK = KF, *so wird* ▭ MFO = ▭ FKO, *und* MH : FK = GF : FO *oder* = GF : 4 FM **) *seyn. Ziehe nun eine andere Linie wie* GQ, *so ist das Verhältniss* MH : FK *zu vergleichen mit* MP : FQ. *Und da* MH : FK = GF : FO, *so ist* GF : FO *zu vergleichen mit* MP : FQ *und* perm. GF : MP *mit* OF : FQ. *Nun ist* GF : MP = FQ : QM; *es werde also* FQ : QM *verglichen mit* OF : FQ *und* convert. QF : FM *mit* FO : OQ, *also* ▭ MFO *mit* ▭ FQO. *Es ist aber* ▭ FKO = ▭ MFO, *mithin werde* ▭ FKO *mit* ▭ FQO *verglichen. Nun ist aber offenbar* ▭ FKO > ▭ FQO, *weil* K *die Mitte von* FO *ist;*

---

*) *Ergänze: „oder kleineres".*

**) *Die Worte: „oder* = GF : 4 FM" *scheinen mir ein Glossem zu seyn.*

folglich ist ▭ FQO < ▭ FKO und, weil ▭ MFO = ▭ FKO, auch ▭ FQO < ▭ MFO. Daher ist QF : FM < FO : OQ und convert. FQ : QM > OF : FQ. Nun ist FQ : QM = GF : MP, mithin ist GF : MP > OF : FQ und perm. GF : FO > MP : FQ. Es ist aber GF : FO = MH : FK, folglich ist MH : FK > MP : FQ. Die Linie GK schneidet also ein grösseres Verhältniss als GQ ab, woraus hervorgeht, dass das Verhältniss MH : FK grösser sey als jedes andere, welches durch irgend eine aus G nach MA, FD gehende Linie abgeschnitten werden kann.

Ich behaupte auch, dass die der GK näheren geraden Linien immer grössere Verhältnisse abschneiden als die von ihr entfernteren. Denn weil MP : FQ < MH : FK und MH : FK = GF : FO, so ist MP : FQ < GF : FO. Es verhalte sich also, wie MP zu FQ, so GF zu einer andern Linie, wie FZ: so ist dieselbe grösser als FQ *), und aus der vorhergehenden Analysis geht hervor, dass ▭ MFZ = ▭ FQZ sey wegen der gleichen Verhältnisse MP : FQ und GF : FZ. Ziehe nun eine andere gerade Linie wie GS **), und vergleiche das Verhältniss MP : FQ mit MR : FS. Es ist aber MP : FQ = GF : FZ, also werde perm. GF : MR mit ZF : FS verglichen. Nun ist GF : MR = FS : SM, folglich ist das Verhältniss FS : SM zu vergleichen mit ZF : FS und convert. SF : FM mit FZ : ZS, also ▭ MFZ mit ▭ FSZ. Aber ▭ MFZ ist gleich ▭ FQZ, vergleiche daher ▭ FQZ mit ▭ FSZ. Auch werde ▭ FKZ mit ▭ FQZ ver-

---

*) Im Lat. folgt hier noch: „folglich ist MP : FQ = GF : FZ".

**) welche nämlich weiter als GQ von GK entfernt ist und mit GQ auf einer Seite der GK liegt. Dieselbe Bemerkung gilt auch für Fall 6, II. IV. Fall 7, II. IV. Vergl. die zweite Anm. zum Raumschnitt.

glichen, also, weil ▭ MFZ = ▭ FQZ ist, ▭ FKZ mit ▭ MFZ. Es ist aber bewiesen worden, dass ▭ FKO = ▭ MFO ist. Zieht man nun das Rechteck FKO vom Rechtecke FKZ und das Rechteck MFO vom Rechtecke MFZ ab, so bleiben als Reste die Rechtecke FK.OZ und FM.OZ. Es werde also ▭ FK.OZ mit ▭ FM.OZ verglichen. Nun ist aber klar, dass ▭ FK.OZ > ▭ FM.OZ sey; addirt man also dieselben zu den gleichen Rechtecken FKO und MFO, so ist ▭ FKZ > ▭ MFZ. Es ist aber ▭ MFZ = ▭ FQZ, daher ist ▭ FKZ > ▭ FQZ. Wird also irgend ein Punkt S gegeben *), so ist ▭ FQZ > ▭ FSZ. Es ist aber ▭ MFZ = ▭ FQZ, folglich ist das Rechteck MFZ grösser als das Rechteck FSZ, mithin ist SF : FM < FZ : ZS und convert. FS zu SM grösser als ZF zu FS. Nun ist FS : SM = GF : MR, folglich ist GF : MR > ZF : FS und perm. GF : FZ grösser als MR : FS. Aber es ist GF : FZ = MP : FQ; folglich ist MP : FQ > MR : FS. Die Linie GQ schneidet also ein grösseres Verhältniss als GS ab. Hieraus geht hervor, dass die der GK näheren geraden Linien grössere Verhältnisse bestimmen als die von ihr entfernteren.

Auch erhellet aus der obigen Construction, dass das grösste Verhältniss MH : FK gleich sey dem Verhältnisse GF : 4 FM, weil OF = 4 FM ist.

Synthesis. Mache KM = MF und verbinde GK. Diese Linie GK wird ein grösseres Verhältniss abschneiden als jede andere aus G nach MA, FD gezogene Linie. Das gegebene Verhältniss wird aber entweder gleich seyn MH : FK, das ist (nach dem Vorigen) GF : 4 FM, oder grösser als MH : FK, oder kleiner. Ist nun das gegebene Verhältniss gleich MH : FK, so löst die Linie GK die Aufgabe; und zwar allein,

*) mit der oben angegebenen Beschränkung.

weil die ihr näheren geraden Linien immer grössere Verhältnisse abschneiden als die von ihr entfernteren. Ist aber das Verhältniss grösser als MH : FK, *so ist das Problem unmöglich, weil das gegebene Verhältniss grösser ist als das grösste. Wenn dagegen das Verhältniss* m : n *kleiner ist als* MH : FK, *so mache* OK = KF; *dann ist* □ MFO = □ FKO *und* MH : FK = GF : FO. *Weil aber* m : n < GF : FO, *so sey* GF : FZ = m : n, *so ist* FZ > FO. *Da nun* KF > FM, *so ist*

□ FK . OZ > □ FM . OZ,

Es ist aber . . . . . □ FK . KO = □ FM . FO,

Fügt man also zum □ FK . KO *das* □ FK . OZ *und*
zum □ FM . FO *das* □ FM . OZ

hinzu, so wird das ganze □ FKZ *grösser seyn als das ganze* □ MFZ. *Es wird desshalb möglich seyn an der Linie* FZ *ein Rechteck gleich* □ MFZ *zu entwerfen, (dessen Ergänzung ein Quadrat sey,)* *) *und zwar auf zweierlei Weise, nämlich zu beiden Seiten des Punktes* K; *wodurch man die gesuchten Punkte, nämlich* Q *und* q, *erhält. Verbinde* GQ *und* Gq; *ich behaupte, dass beide Linien die Aufgabe lösen. Denn weil* □ MFZ = □ FQZ, *so ist* QF : FM = FZ : ZQ *und* convert. FQ : QM = ZF : FQ. *Es ist aber* FQ : QM = GF : MP, *folglich ist* GF : MP = ZF : FQ *und* perm. GF : FZ = MP : FQ. *Nun ist* GF : FZ = m : n, *folglich ist* m : n = MP : FQ; *mithin löst* GQ *die Aufgabe. Und eben so wird bewiesen, dass die Linie* Gq *dasselbe leiste. Beide Linien* GQ, Gq *also genügen der Aufgabe.* **)

---

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

**) *Vielleicht möchte hier noch zu ergänzen seyn:* Ac manifestum est, rectas ab utraque parte propiores ipsi *GK* auferre rationes majores quam quae fecantur a remotioribus ab eadem.

Wir haben also die Auflösung des Problems nach allen seinen Arten gefunden und die Construction desselben gezeigt. Zieht man aber die Parallele, so wird das gegebene Verhältniss entweder gleich seyn GF : 4 FM, *oder grösser, oder kleiner. Ist es gleich demselben, so wird die Aufgabe nach der ersten und zweiten Art und auf eine Weise nach der dritten gelöst. Ist es grösser, so kann zwiefach construirt werden, nämlich nach der ersten und zweiten Art. Ist aber das Verhältniss kleiner, dann kann die Construction auf viererlei Weise geschehen, nämlich nach der ersten und zweiten Art, und doppelt nach der dritten.*

Fall 6.

Es treffe nun die Linie *GL*, welche durch *G* der *AB* parallel gezogen wird, die *CD* jenseit des Punktes *F*, das ist, der Punkt *F* liege zwischen ihr und dem Punkte *M*. Durch *G* lassen sich alsdann Linien nach vier Arten ziehen; entweder nämlich werden sie von *MA*, *FC* das Verhältniss abschneiden; oder von *MB*, *FC*; oder von *MB*, *FM*; oder endlich von *MA*, *FD*.

Cas. I. Fig. 17. *Analysis. Es werde also nach der ersten Art eine Linie* HK *gezogen, welche von* MA, FC *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Mache* GL : FO *gleich dem Verhältnisse* MH : FK. *Da* GL *gegeben ist, so ist es auch* FO *der Grösse und Lage nach; und da der Punkt* F *gegeben wird, so ist auch der Punkt* O *gegeben* *). *Weil nun* MH : FK = GL : FO, *so ist* perm. MH : GL = KF : FO. *Es ist aber* MH : GL = MK : KL, *folglich ist* MK : KL = KF : FO *und* divid. ML : LK *wie* KO : OF, *mithin ist das Rechteck*

*) *Ergänze: folglich ist* LO *der Grösse und Lage nach gegeben.*

ML . FO *gleich* ▭ LKO. *Das* ▭ ML . FO *ist aber gegeben, weil beide Seiten desselben gegeben sind; folglich ist auch* ▭ LKO *gegeben, welches an der gegebenen* LO *so entworfen werden muss, dass der Überschuss ein Quadrat ist. Folglich ist der Punkt* K *und die Linie* HK *der Lage nach gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Mache* GL : FO = m : n *und entwirf an* LO *ein dem* ▭ ML . FO *gleiches Rechteck, dessen Überschuss ein Quadrat sey, nämlich das* ▭ LKO, *verbinde* GK *und verlängere sie nach* H. *Ich behaupte, dass die Linie* HK *die Aufgabe löse oder dass* MH : FK = m : n *sey. Denn weil* ▭ ML . FO = ▭ LKO, *so ist* ML : LK = KO : OF *und* comp. MK : KL *oder* MH : GL = KF : FO, *also* perm. MH : FK = GL : FO. *Nun ist* GL : FO = m : n, *folglich löst die Linie* HK *die Aufgabe. Ich behaupte auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie, wie* PQ. *Schneidet nun* PQ *ein Verhältniss gleich* m : n *ab, so ist das Verhältniss* MP : FQ *gleich dem Verhältnisse* MH : FK. *Diess ist aber nicht möglich, weil es offenbar kleiner als jenes ist.*

Es ist also klar, dass die dem Punkte M *näheren geraden Linien, wie* PQ *), *kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren.*

Cas. II. Fig. 18. *Analysis. Es werde nun nach der zweiten Art die Linie* GK *gezogen, welche von* MB, FC *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Mache* GL : FO = MH : FK. *Weil* GL *gegeben ist, so ist* FO *der Grösse und Lage nach bekannt. Wegen des gegebenen Punktes* F *ist also der Punkt* O *bekannt, folglich ist, weil der Punkt* L *bekannt ist, auch die Linie* LO *der Grösse und Lage nach gegeben. Weil nun* MH : FK = GL : FO, *so*

---

*) *Die Worte „wie* PQ" *müssen gestrichen werden.*

ist perm. MH : GL = KF : FO. *Es ist aber* MH : GL = MK : KL, *folglich ist* MK : KL *gleich* KF : FO, *und* comp. ML : LK = KO : OF; *mithin ist Rechteck* ML . FO *gleich Rechteck* LK . KO. *Es ist aber* ▭ ML . FO *gegeben, weil beide Seiten desselben gegeben sind; folglich ist auch* ▭ LKO *bekannt. Entwirft man also dasselbe an* LO, *so dass die Ergänzung ein Quadrat ist, so erhält man den Punkt* K. *Und weil der Punkt* G *gegeben wird, so ist die Linie* GK *der Lage nach gegeben.*

Determination. Weil aber in der Construction das Verhältniss GL : FO *gleich dem gegebenen gemacht und an* LO *ein dem* ▭ ML . FO *gleiches Rechteck entworfen werden muss, dessen Ergänzung ein Quadrat sey: so wird der Punkt* K *in der Linie* LF *liegen. Aber nicht immer ist es möglich die gesuchte Linie zu ziehen. Wenn nämlich das* ▭ ML . FO *grösser ist als das Quadrat der halben* LO, *so kann die Entwerfung nicht geschehen, und desshalb kann das Problem nicht immer und in allen Fällen construirt werden.*

Nur auf eine Weise aber geschieht diess, wenn die durch G *gezogene Linie die* LO *in ihrer Mitte* K *trifft, so dass zugleich* ▭ LKO *gleich ist* ▭ ML . FO *und somit der Aufgabe Genüge geleistet wird. Wir werden aber jenes äusserste Verhältniss erhalten, wenn wir das Verhältniss* GL : FO *demselben gleich setzen und nach Halbirung der* LO *in* K *annehmen, dass* ▭ LKO = ▭ ML . FO *sey. Wir haben also einen solchen Punkt* O *in* FD *zu suchen, dass, wenn* LO *in* K *halbirt wird,* ▭ LKO = ▭ ML . FO *ist. Es wird also seyn* ML : LK = KO : OF *und* convert. LM : MK = OK : KF. *Es ist aber* OK = KL, *folglich* LM : MK = LK : KF, *also* perm. ML : LK = MK : KF *und* convert. LM : MK = KM : MF; *folglich ist* MK *die mittlere Proportionale zwischen* LM *und* MF. *Nun sind aber*

beide Linien LM, MF *gegeben, also auch* MK *der Grösse und Lage nach. Wegen des gegebenen Punktes* M *ist also der Punkt* K *gegeben und somit wegen des bekannten Punktes* L *die Linie* LK, *welcher* KO *gleich ist. Folglich, weil der Punkt* K *gegeben ist, ist auch der Punkt* O *gegeben.*

Die Construction dieser Aufgabe ist also folgende. Nimm die mittlere Proportionale zwischen LM, MF, *sie sey* MK; *so ist klar, dass* LK > KF *ist. Denn weil* LM : MK = KM : MF, *so wird die Differenz der Vorderglieder zur Differenz der Hinterglieder, oder* LK *zu* KF, *in demselben Verhältnisse seyn. Es ist aber* LM > MK, *also auch* LK > KF. *Mache nun* OK = KL *), *so wird der Punkt* O *der gesuchte seyn, das ist, es wird* ▭ ML . FO = ▭ LKO *seyn. Denn weil* LM : MK = KM : MF, *so ist* convert. *und* perm. LM : MK = LK : KF. *Aber* LK *ist gleich* KO, *folglich ist* LM : MK = OK : KF *und* convert. ML : LK = KO : OF, *mithin* ▭ LM . FO = ▭ LKO. *Verbinde nun* GK *und verlängere sie, so behaupte ich, dass die Linie* GH *das Verlangte leiste, oder dass* MH : FK = GL : FO *sey. Denn weil* ▭ ML . FO = ▭ LKO, *so ist* ML *zu* LK *gleich* KO *zu* OF *und* divid. MK : KL = KF : FO. *Es ist aber* MK : KL = MH : GL, *folglich ist* MH *zu* GL *wie* KF *zu* FO *und* perm. MH : FK = GL : FO. *Man construirt also richtig, wenn* MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM, MF *genommen und* GK *verbunden und nach* H *verlängert wird.*

Es ist nun zu untersuchen, ob die Linie GK *ein grösseres oder kleineres Verhältniss* MH : FK *als alle übrigen geraden Linien abschneide, die aus* G *nach* MB, FC *gezogen werden können. Diess wird auf*

---

*) *so wird der Punkt* O *in der Verlängerung von* KF *liegen.*

folgende Weise bestimmt. Es bleibe die Figur nebst der Parallele, nimm die mittlere Proportionale zwischen LM, MF, sie sey MK; verbinde GK und verlängere sie; so ist zu bestimmen, ob die Linie GK ein grösseres oder kleineres Verhältniss $MH : FK$ als jede andere Linie abschneide, die aus G nach MB, FC gezogen werden kann. Mache $OK = KL$, so ist $\square ML \cdot FO = \square LKO$ und $MH : FK = GL : FO$. Ziehe nun eine andere Linie, wie GP, so ist das Verhältniss $MP : FQ$ zu vergleichen mit $MH : FK$, also, weil $MH : FK = GL : FO$ ist, $MP : FQ$ mit $GL : FO$ und perm. $MP : GL$ mit dem Verhältnisse $QF : FO$. Da nun aber das Verhältniss $MP : GL$ gleich ist dem Verhältnisse $MQ : QL$, so werde $MQ : QL$ verglichen mit $QF : FO$, und comp. $ML : LQ$ mit $QO : OF$, mithin $\square ML \cdot FO$ mit $\square LQO$. Nun ist aber offenbar $\square LKO > \square LQO$, weil der Punkt K die Linie LO halbirt, und es ist $\square ML \cdot FO = \square LKO$; folglich ist $\square ML \cdot FO > \square LQO$. Daher ist $ML : LQ > QO : OF$ und divid. $MQ : QL > QF : FO$. Es ist aber $MQ : QL = MP : GL$, folglich ist $MP : GL > QF : FO$ und perm. $MP : FQ > GL : FO$, mithin, weil $GL : FO = MH : FK$ ist, $MP : FQ > MH : FK$. Die Linie GH schneidet also ein kleineres Verhältniss als GP ab; woraus hervorgeht, dass GH ein kleineres Verhältniss abschneide als jede beliebige Linie, welche aus G nach MB, FC gezogen werden kann.

Weil nun aber die Linie GH ein kleineres Verhältniss als jede andere aus G nach MB, FC mögliche Linie abschneidet: so behaupte ich auch, dass die der GH näheren kleinere Verhältnisse bestimmen als die von ihr entfernteren. Denn weil $MP : FQ$ grösser ist als $MH : FK$, das ist, als $GL : FO$, so sey GL zu einer andern Linie FZ gleich $MP : FQ$, welche folglich kleiner als FO seyn wird. Dann wird, wie aus dem Vorigen erhellet, $\square ML \cdot FZ = \square LQZ$ seyn.

Da nun MP : FQ = GL : FZ *ist, so werde eine andere Linie, wie* GR, *gezogen und das Verhältniss* MR : FS *verglichen mit* MP : FQ. *Weil aber* MP : FQ = GL : FZ, *so vergleiche* MR : FS *mit* GL : FZ *und* perm. MR : GL *mit* SF : FZ. *Nun ist* MR : GL = MS : SL, *folglich werde (*MS : SL *mit* SF : FZ *und)* *) comp. ML : LS *mit* SZ : ZF, *und* □ ML . FZ *mit* □ LSZ *verglichen. Es ist aber* □ ML . FZ = □ LQZ, *folglich werde* □ LQZ *verglichen mit* □ LSZ. *Vergleiche auch* □ LKZ *mit* □ LQZ *oder, weil* □ ML . FZ = □ LQZ *ist,* □ LKZ *mit* □ ML . FZ. *Nun ist* □ ML . FO = □ LKO *und, wenn man*

von □ ML . FO *das* □ ML . FZ
und von □ LKO *das* □ LKZ

abzieht, der Rest □ ML . OZ *grösser als der Rest* □ LK . OZ. *Weil also*

□ ML . FO = □ LKO
und □ ML . OZ > □ LK . OZ,

so ist □ ML . FZ < □ LKZ, *mithin auch, weil* □ LQZ = □ ML . FZ *ist,* □ LQZ < □ LKZ. *Hieraus aber folgt, dass* □ LQZ > □ LSZ *ist. Da nun* □ LQZ = □ ML . FZ, *so ist* □ ML . FZ > □ LSZ, *folglich* ML : LS > SZ : ZF *und* divid. MS : SL, *das ist* MR : GL > SF : FZ, *mithin* perm. MR : FS > GL : FZ. *Es ist aber* GL : FZ = MP : FQ, *folglich ist* MR : FS > MP : FQ. *Die Linie* GP *schneidet also ein kleineres Verhältniss als* GS *ab. Nun ist* GP *der* GH *näher als* GS, *folglich schneiden die der* GH *näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse ab als die von ihr entfernteren.*

Synthesis. Nimm MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM *und* MF, *verbinde* GK *und verlängere sie nach* H: *so schneidet* GH *das Verhältniss* MH : FK *ab (welches kleiner ist als jedes andere durch irgend eine Linie aus* G *nach* MB, FC*).* *)

---

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

Das gegebene Verhältniss aber wird entweder das Verhältniss MH : FK *selbst seyn, oder kleiner, oder grösser als dasselbe. Ist nun das Verhältniss gleich* MH : FK, *so genügt die Linie* GH *der Aufgabe, und es ist klar, dass sie allein dieses leiste. Ist es kleiner als* MH : FK, *so ist die Aufgabe unmöglich. Ist aber das gegebene Verhältniss, nämlich* m : n, *grösser als* MH : FK, *so mache* OK = KL; *alsdann wird* □ ML . FO = □ LKO *und* MH : FK = GL : FO *seyn. Weil nun* m : n *grösser ist als* MH : FK *das ist als* GL : FO; *so mache* GL : FZ = m : n, *so wird* FZ < FO *seyn. Es ist aber*

□ ML . FO = □ LKO

und □ ML . OZ > □ LK . OZ,

folglich ist □ ML . FZ < □ LKZ, *mithin ist es möglich jenes Rechteck an der Linie* LZ *zu entwerfen. Es werde also an* LZ *ein dem* □ ML . FZ *gleiches Rechteck entworfen, dessen Ergänzung ein Quadrat sey, zu beiden Seiten des Punktes* K: *so erhält man die Punkte* Q *und* q. *Verbinde* GQ, Gq *und verlängere sie nach* P, p. *Ich behaupte, dass beide Linien* GP, Gp *der Aufgabe genügen oder dass das Verhältniss* m : n *gleich sey* MP : FQ *oder* Mp : Fq. *Denn weil* □ ML . FZ = □ LQZ, *so ist* ML : LQ = QZ : ZF *und* divid. MQ : QL = QF : FZ. *Nun ist* MQ : QL = MP : GL, *mithin ist* MP : GL = QF : FZ *und* perm. MP : FQ = GL : FZ. *Es ist aber* GL : FZ = m : n, *folglich ist* MP : FQ = m : n. *(Die Linie* GP *löst also die Aufgabe. Eben so aber wird bewiesen, dass* Mp : Fq = m : n *sey.)* *) *Folglich löst jede von den Linien* GP, Gp *die Aufgabe; und es ist klar, dass die der* GH *zu beiden Seiten näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihr entfernteren.*

---

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

Die Gränze des Verhältnisses aber wird so bestimmt. Es ist MH : FK = GL : FO. Nun ist FO der Überschuss der Linien LM, MF zusammengenommen über LM, MO; und LM, MO zusammengenommen sind gleich dem Doppelten der MK, weil LK = KO ist; das Quadrat von 2 MK aber ist gleich dem vierfachen ▭ LMF, weil MK die mittlere Proportionale zwischen LM und MF ist. Daher ist FO der Überschuss, um welchen LM, MF zusammengenommen diejenige Linie übertreffen, deren Quadrat viermal so gross ist als ▭ LMF. Folglich ist das Verhältniss MH : FK (welches kleiner ist als jedes Verhältniss, welches durch Linien aus G nach MB, FC abgeschnitten wird) gleich dem Verhältnisse der Linie GL zum Überschusse, um welchen LM, MF zusammengenommen übertreffen diejenige Linie, deren Quadrat gleich 4 ▭ LMF ist.

Cas. III. Fig. 19. Analysis. Es werde nun nach der dritten Art die Linie GH gezogen, welche von MB, FM die Segmente MH, FK in dem gegebenen Verhältnisse abschneide. Mache GL : FO = MH : FK. Weil GL gegeben ist, so wird FO der Grösse und Lage nach gegeben seyn. Da aber der Punkt F gegeben wird, so ist der Punkt O gegeben, also wird wegen des bekannten Punktes L die Linie LO der Grösse und Lage nach gegeben. Weil nun MH : FK = GL : FO, so ist perm. MH zu GL wie KF zu FO. Es ist aber MH : GL gleich MK : KL, folglich ist MK : KL = KF : FO und comp. ML : LK = KO : OF, also ▭ ML . FO = ▭ LKO. Nun wird ▭ ML . FO gegeben, weil beide Linien ML, FO gegeben sind; folglich ist auch ▭ LKO gegeben. Wird also jenes Rechteck an LO so entworfen, dass der Überschuss ein Quadrat ist, so erhält man den Punkt K. Und weil der Punkt G gegeben ist, wird die Linie GK der Lage nach gegeben seyn.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m:n. *Mache* GL:FO = m:n *und entwirf an* LO *ein dem* ▭ ML.FO *gleiches Rechteck, dessen Überschuss ein Quadrat sey. Es sey dieses das* ▭ LKO. *Da nun* ▭ ML.FO *weder kleiner als* ▭ LFO, *denn* ML > LF, *noch grösser als* ▭ LMO *ist, denn* FO < OM: *so ist klar, dass der Punkt* K *zwischen* F, M *fällt. Verbinde* GK *und verlängere sie nach* H. *Ich behaupte, dass die Linie* GKH *die Aufgabe löse oder dass* MH:FK = m:n *sey. Denn weil* ▭ ML.FO = ▭ LKO, *so ist* ML:LK = KO:OF *und* divid. MK:KL *das ist* MH:GL = KF:FO, *also* perm. MH:FK = GL:FO. *Es ist aber* GL:FO = m:n, *folglich ist* MH:FK = m:n *und die Linie* GH *löst die Aufgabe. Ich behaupte auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie, wie* GP, *welche das Verhältniss* m:n *abschneide. Es ist daher* MP:FQ = MH:FK. *Diess ist aber nicht möglich, weil das Vorderglied kleiner ist als das Vorderglied, und das Hinterglied grösser als das Hinterglied; woraus hervorgeht, dass die Linie* GP *ein kleineres Verhältniss als* GH *abschneidet.*

Die dem Punkte M *näheren geraden Linien schneiden kleinere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren.* *)

Cas. IV. Fig. 20. *Analysis. Es werde endlich nach der vierten Art die Linie* GK *gezogen, welche von* MA, FD *das Verhältniss* MH:FK *gleich dem gegebenen abschneide. In demselben Verhältnisse nimm* GL:FO, *so wird wegen der bekannten* GL *die Linie* FO *der Grösse und Lage nach gegeben seyn; daher ist, weil der Punkt* F *gegeben wird, auch der Punkt* O *gegeben. Da nun* GL:FO = MH:FK, *so ist* perm. GL:MH *das ist* LK:KM = OF:FK *und* convert.

*) *Dieser Satz fehlt im Lat.*

KL : LM = FO : OK, *mithin* ▭ ML . FO = ▭ LKO. *Es ist aber* ▭ ML . FO *gegeben*, *weil beide Linien* ML, FO *gegeben sind; folglich ist auch* ▭ LKO *gegeben. Entwirft man also jenes Rechteck an* LO, *so dass die Ergänzung ein Quadrat ist: so erhält man den Punkt* K. *Und da der Punkt* G *gegeben wird, so ist also die Linie* GK *der Lage nach* *) *gegeben.*

Determination. Weil aber in der Composition GL : FO *in dem gegebenen Verhältnisse genommen und an* LO *ein dem* ▭ ML . FO *gleiches Rechteck, dessen Ergänzung ein Quadrat sey, nämlich das* ▭ LKO *entworfen und die Linie* GK *gezogen werden muss: so wird man den Punkt* K *nicht in allen Fällen erhalten können. Daher ist auch die Construction nicht immer und in allen Fällen möglich. Nur auf eine Weise aber wird sie geschehen, wenn die Linie* LO *in* K *halbirt wird. Wir haben also folgende Aufgabe.*

Um dieses äusserste Verhältniss zu erhalten sezzen wir dasselbe gleich GL : FO. *Wird nun* LO *in* K *halbirt, so muss* ▭ LKO = ▭ ML . FO *seyn. Es sey geschehen. Jenes Verhältniss sey* GL : FO *und es werde* LO *in* K *halbirt, so dass* ▭ LKO = ▭ ML . FO *ist. Weil also* ▭ LKO = ▭ ML . FO, *so ist* KL : LM = FO : OK *und* divid. FK : KO = KM : ML. *Es ist aber* OK = KL, *also* FK : KL = KM : ML, *mithin* perm. *und* divid. FM : MK = KM : ML. *Folglich ist* MK *die mittlere Proportionale zwischen* LM, MF. *Da nun beide Linien* LM, MF *gegeben sind, so ist auch* MK *der Grösse und Lage nach gegeben; und da der Punkt* M *gegeben ist, so ist es auch der Punkt* K. *Es ist aber der Punkt* L *bekannt, mithin die Linie* LK, *welcher* KO *gleich ist. Folglich ist auch* KO

---

*) *Unrichtig steht im Lat.* magnitudine et positione.

der Grösse und Lage nach gegeben. Nun ist aber der Punkt K *bekannt, folglich ist der Punkt* O, *das ist der gesuchte Punkt gegeben.*

Die Aufgabe wird daher so gelöst werden. Mit Beibehaltung der Figur und der Parallele nimm MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM, MF *und mache* OK = KL. *Ich behaupte, dass* O *der gesuchte Punkt, das ist, dass* ▭ LKO = ▭ ML . FO *sey. Denn weil* MK *die mittlere Proportionale zwischen* LM, MF *ist, so ist* FM : MK = KM : ML. *Nun hat die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder dasselbe Verhältniss; folglich ist* FK : KL = KM : ML *oder, weil* LK = KO *ist*, FK : KO = KM : ML *und* comp. FO : OK = KL : LM, *mithin* ▭ LKO = ▭ ML . FO. *Folglich ist* O *der gesuchte Punkt. Verbindet man nun* GK, *so behaupte ich, dass* MH : FK = GL : FO. *Denn es ist* FO : OK = KL : LM *und* convert. OF : FK = LK : KM *das ist* = GL : MH, *mithin verwechselt* GL : FO = MH : FK. *Man nehme also zur Construction* MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM, MF *und verbinde* GK: *so ist klar, dass das Verhältniss* MH : FK, *welches* GK *abschneidet, entweder kleiner oder grösser ist als jedes andere Verhältniss, welches durch irgend eine Linie, die aus* G *nach* MA, FD *geht, abgeschnitten werden kann.*

Diess wird aber auf folgende Weise bestimmt. Mit Beibehaltung der Figur nebst der Parallele nimm die mittlere Proportionale zwischen LM, MF, *wie* MK, *und verbinde* GK: *so ist zuerst zu untersuchen, ob* GK *ein grösseres oder kleineres Verhältniss* MH : FK *als jede andere Linie abschneide, die aus* G *nach* MA, FD *gezogen werden kann. Mache* OK = KL, *so ist* ▭ LKO = ▭ ML . FO *und daher* MH : FK = GL : FO. *Ziehe nun eine andere gerade Linie, wie* GQ, *und vergleiche das Verhältniss* MH : FK *mit* MP : FQ *oder, weil* MH : FK = GL : FO *ist*, GL : FO

mit MP : FQ *und verwechselt* GL : MP *mit* OF : FQ. *Nun ist* GL : MP = LQ : QM, *vergleiche also* LQ : QM *mit* OF : FQ *und* convert. QL : LM *mit* FO : OQ, *also* ▭ ML . FO *mit* ▭ LQO. *Es ist aber* ▭ ML . FO = ▭ LKO, *vergleiche daher* ▭ LKO *mit* ▭ LQO. *Nun ist klar*, *dass* ▭ LKO > ▭ LQO, *weil der Punkt* K *die Linie* LO *halbirt: daher ist* ▭ LQO < ▭ ML . FO, *also* QL : LM < FO : OQ *und* convert. LQ : QM *oder* GL : MP > OF : FQ *und* perm. GL : FO *das ist* MH : FK > MP : FQ. *Die Linie* GK *schneidet also ein grösseres Verhältniss als* GQ *ab; woraus hervorgeht*, *dass* GK *ein grösseres Verhältniss abschneidet als jede andere Linie*, *die aus* G *nach* MA, FD *gezogen wird.*

Ich behaupte ausserdem, *dass die der* GK *näheren geraden Linien grössere Verhältnisse bestimmen als die von ihr entfernteren. Denn weil* MP : FQ *kleiner ist als* MH : FK *oder als* GL : FO, *so verhalte sich wie* MP *zu* FQ, *so* GL *zu einer andern Linie, welche grösser als* FO *seyn wird. Sie sey* FZ: *so wird nach dem schon Bewiesenen* ▭ ML . FZ = ▭ LQZ *seyn. Ziehe nun eine andere gerade Linie wie* GS, *so ist das Verhältniss* MP : FQ *zu vergleichen mit* MR *zu* FS. *Es ist aber* MP : FQ *wie* GL : FZ. *Vergleiche also* GL : FZ *mit* MR : FS *und* perm. GL : MR *oder* LS : SM *mit* ZF : FS, *also* convert. SL : LM *mit* FZ : ZS *und* ▭ ML . FZ *mit* ▭ LSZ. *Nun ist* ▭ ML . FZ = ▭ LQZ; *vergleiche also* ▭ LQZ *mit* ▭ LSZ. *Auch werde* ▭ LKZ *verglichen mit* ▭ LQZ *oder*, *weil* ▭ LQZ = ▭ ML . FZ *ist*, ▭ LKZ *mit* ▭ ML . FZ. *Nun ist aus dem Vorigen bekannt*, *dass* ▭ LKO = ▭ ML . FO *ist. Zieht man also*

▭ LKO *von* ▭ LKZ
und ▭ ML . FO *von* ▭ ML . FZ

ab, *so sind die Reste mit einander zu vergleichen*, *oder* ▭ LK . OZ *mit* ▭ ML . OZ. *Es ist aber offen-*

bar ▭ LK . OZ > ▭ ML . OZ, *weil* LK > ML *ist. Weil also* ▭ ML . OZ *kleiner als* ▭ LK . OZ, *und* ▭ ML . FO *gleich ist dem Rechtecke* LK . KO: *so ist das ganze Rechteck* ML . FZ *kleiner als das ganze Rechteck* LKZ. *Aber* ▭ ML . FZ = ▭ LQZ, *folglich ist* ▭ LQZ < ▭ LKZ. *Hieraus folgt aber, dass* ▭ LSZ < ▭ LQZ *ist. Weil nun* ▭ LQZ = ▭ ML . FZ, *so ist* ▭ LSZ < ▭ ML . FZ, *und* SL : LM < FZ : ZS, *mithin ist* convert. LS : SM *oder* GL : MR > ZF : FS *und* perm. GL : FZ > MR : FS. *Es ist aber* GL : FZ = MP : FQ, *also* MP : FQ > MR : FS. *Die Linie* GQ *also, welche weniger von der* GK *absteht, schneidet ein grösseres Verhältniss ab als die entferntere* GS. *Somit ist klar, dass die der* GK *näheren geraden Linien grössere Verhältnisse abschneiden als die von ihr entfernteren.*

Synthesis. Es bleibe die frühere Construction nebst der Parallele. Nimm MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM, MF *und verbinde* GK, *welche das Verhältniss* MH : FK *abschneidet. Wenn nun* GK *der Aufgabe genügt, so ist klar, dass sie allein dieses leiste. Ist das gegebene Verhältniss grösser als* MH : FK, *) *so ist die Aufgabe unmöglich, weil* GK *ein grösseres Verhältniss* MH : FK *abschneidet als jede andere aus* G *nach* MA, FD *gehende Linie. Wenn aber ein Verhältniss* m : n < MH : FK *gegeben wird, so mache* OK = KL; *alsdann ist* ▭ ML . FO = ▭ LKO *und* MH : FK = GL : FO. *Ferner nimm* GL : FZ = m : n, *so wird* FZ > FO *seyn; und da*

▭ LK . OZ > ▭ ML . OZ
und ▭ LKO = ▭ ML . FO,

---

*) *Im Lat. steht bloss:* quod si major fuerit ratione MH ad FK. *Diese Stelle ist wahrscheinlich verdorben und nach Anleitung der Synthesis in* Cas. II. *herzustellen.*

so ist das ganze ▭ LKZ *grösser als das ganze* ▭ ML.FZ. *Daher kann das* ▭ ML.FZ *an* LZ *so entworfen werden, dass die Ergänzung ein Quadrat sey; und zwar auf zweierlei Weise, nämlich zu beiden Seiten des Punktes* K. *Wenn man nun durch die erhaltenen Punkte* Q *und* q *die geraden Linien* GQ, Gq *zieht: so behaupte ich, dass beide Linien* GQ, Gq *der Aufgabe genügen oder dass* MP : FQ = m : n *und* Mp : Fq = m : n *sey. Denn weil* ▭ LQZ = ▭ ML.FZ, *so ist* QL : LM = FZ : ZQ *und* convert. LQ : QM *das ist* GL : MP = ZF : FQ, *also* perm. GL : FZ *wie* MP : FQ. *Es ist aber* GL : FZ = m : n, *folglich ist* MP : FQ = m : n. *Und durch dieselben Schlüsse wird gezeigt, dass* Mp : Fq = m : n *sey. Folglich löst jede der Linien* GQ, Gq *die Aufgabe. Auch ist klar, dass die zu beiden Seiten der* GK *näheren geraden Linien grössere Verhältnisse abschneiden als die von ihr entfernteren.*

Das Gränzverhältniss aber wird so bestimmt. Es ist MH : FK = GL : FO. *Nun ist* FO *gleich* FK, KO *zusammengenommen, das ist gleich* LK, KF *(weil* LK = KO *ist); die Linien* LK, KF *aber zusammengenommen sind gleich* LM, MF, 2 MK *zusammen, und das Quadrat von* 2 MK *ist gleich dem vierfachen* ▭ LMF. *Folglich ist* MH : FK *gleich dem Verhältnisse der* GL *zu der Linie, welche besteht aus* LM, MF *und derjenigen, deren Quadrat gleich* 4 ▭ LMF *ist.*

Wir haben also gefunden, wie das Problem nach allen seinen Arten construirt werden könne; und es ist klar, dass in keinem Falle *) *die Auflösung nach allen Arten zugleich möglich ist. Denn man ziehe* (Fig. 21) GL ‡ AB, *suche die mittlere Proportionale zwischen* LM, MF, *mache die Linien* MK *und* Mk *der-*

---

*) in nullo casu *d. h. niemals, das gegebene Verhältniss mag beschaffen seyn wie es wolle; vergl. die erste Note zur Determ. in Fall* 5.

selben gleich, *verbinde* GK, Gk *und mache* OK = KL *und* ok = kL: *so ist nach der zweiten Art das kleinste Verhältniss* Mh : Fk *oder* GL : Fo, *und nach der vierten das grösste* MH : FK *oder* GL : FO. *Weil aber nach der zweiten Art das kleinste Verhältniss* GL : Fo, *und nach der vierten das grösste Verhältniss* GL : FO *ist*, *so ist offenbar das Verhältniss* GL : Fo *grösser als das Verhältniss* GL : FO. *Das gegebene Verhältniss wird also entweder gleich* GL : Fo, *oder kleiner als* GL : Fo *und grösser als* GL : FO, *oder grösser als* GL : Fo, *oder gleich* GL : FO, *oder kleiner als* GL : FO *seyn*. — *Ist es gleich* GL : Fo, *so kann auf dreierlei Weise construirt werden*, *nämlich nach der ersten und dritten Art*, *nach welchen beliebige Verhältnisse abgeschnitten werden können*, *und auf eine Weise nach der zweiten Art*; *nicht aber nach der vierten*, *weil das Verhältniss* GL : Fo *grösser ist als* GL : FO. — *Wenn das Verhältniss kleiner ist als* GL : Fo *und grösser als* GL : FO, *so ist das Problem nur nach zwei Arten möglich*, *nämlich nach der ersten und dritten*; *nicht aber kann es nach der zweiten und vierten gelöst werden*, *weil das gegebene Verhältniss kleiner ist als das kleinste und grösser als das grösste*. — *Ist es grösser als* GL : Fo, *so wird die Aufgabe auf viererlei Weise gelöst werden*, *nämlich nach der ersten und dritten Art*, *und doppelt nach der zweiten*; *nicht aber nach der vierten*, *weil das Verhältniss grösser ist als das grösste* *). — *Wenn es aber das grösste*, *das ist gleich* GL : FO *ist*, *so wird dreifach construirt werden*, *nämlich nach der ersten und dritten Art und einfach nach der vierten*; *nicht aber nach der zweiten*, *weil es* **kleiner** *ist als das*

---

*) *Hier folgt noch das Glossem:* sive quam ratio *GL* ad *FO*; est enim *GL* ad *Fo* major ratione *GL* ad *FO*.

kleinste *). — *Ist endlich das gegebene Verhältniss kleiner als* GL : FO, *so kann die Aufgabe auf viererlei Weise gelöst werden, nach der ersten und dritten Art, und doppelt nach der vierten; nicht aber nach der zweiten, weil das gegebene Verhältniss kleiner ist als das kleinste.*

Wir haben also nachgewiesen, ob die Construction möglich sey oder nicht, bei allen Verschiedenheiten des gegebenen Verhältnisses.

Fall 7.

Es bleibe nun der gegebene Punkt *G*, wo er früher war, die Parallele aber schneide die *CD* diesseit des Punktes *F*, das ist sie falle zwischen die Punkte *M* und *F*, wie die Linie *GL*. Die durch den Punkt *G* gehenden Linien aber können auf vier verschiedene Arten gezogen werden; entweder nämlich wird das Verhältniss in *MA*, *FC* genommen werden; oder in *MA*, *FM*; oder in *MB*, *FM*; oder endlich in *MA*, *FD*.

Cas. I. Fig. 22. *Analysis. Es werde aber zuerst nach der ersten Art die Linie* HGK *gezogen, welche von* MA, FC *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Mache* GL : FO = MH : FK. *Weil* GL *gegeben ist, so wird auch* FO *der Grösse und Lage nach gegeben, und wegen des gegebenen Punktes* F *auch der Punkt* O **). *Weil nun* MH : FK = GL : FO, *so ist verwechselt* MH : GL, *das ist* MK : KL = KF : FO *und* divid. ML : LK = KO : OF, *mithin* ▭ ML . FO = ▭ LKO. *Es wird aber* ▭ ML . FO *gegeben wegen seiner bekannten Seiten, folglich auch*

---

*) *Eben so folgt hier das Glossem:* ratio enim *GL* ad *FO* minor est ratione *GL* ad *FO*.

**) *Ergänze: Weil also die Punkte* L, O *gegeben sind, so ist die Linie* LO *der Lage und Grösse nach gegeben.*

▭LKO. *Entwirft man also dieses Rechteck an der gegebenen* LO, *so dass der Überschuss ein Quadrat ist: so erhält man den Punkt* K; *und da der Punkt* G *gegeben ist, so ist auch die Linie* HGK *der Lage nach gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m:n. *Wie sich nun* m *zu* n *verhält, so verhalte sich* GL *zu* FO; *entwirf an* LO *ein dem* ▭ML.FO *gleiches Rechteck, das ein Quadrat zum Überschuss hat, es sey* ▭LKO; *verbinde* GK *und verlängere sie: ich behaupte, dass die Linie* HK *der Aufgabe genüge oder dass* MH:FK = m:n *sey. Denn weil* ▭ML.FO = ▭LKO, *so ist* ML:LK = KO:OF *und* comp. MK:KL, *das ist* MH:GL = KF:FO, *also* perm. MH:FK = GL:FO *das ist* = m:n *(nach der Construction); mithin löst die Linie* HK *die Aufgabe. Ich behaupte auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wenn eine andere Auflösung möglich ist, so ziehe eine andere Linie, wie* PGQ, *so dass* MP:FQ = MH:FK *sey. Diess ist aber nicht möglich, weil das Vorderglied grösser ist als das Vorderglied, und das Hinterglied kleiner als das Hinterglied, und also* HK *ein kleineres Verhältniss als* PQ *abschneidet.*

Die dem Punkte M *näheren geraden Linien schneiden kleinere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren* *).

Cas. II. Fig. 23. *Analysis. Es werde nach der zweiten Art die Linie* HK *gezogen, welche von* MA, FM *das Verhältniss* MH:FK *gleich dem gegebenen abschneide. Mache* GL:FO = MH:FK. *Weil also* MH:FK = GL:FO, *so ist* perm. MH:GL, *das ist* MK:KL = KF:FO. *Nun ist* MK > KL, *also* KF > FO **). *Es ist aber* FO *der Grösse und Lage*

---

*) *Dieser Satz fehlt im Lat.*

**) *Ich halte diesen Schluss für ein Glossem.*

nach gegeben, folglich ist wegen des gegebenen Punktes F *auch der Punkt* O *gegeben. Da nun* MK : KL = KF : FO, *so ist* divid. ML : LK = KO : OF *und* ▭ ML . FO = ▭ LKO. *Es sind aber die Linien* ML, FO *gegeben, also auch* ▭ LKO, *welches an der bekannten* LO *so zu entwerfen ist, dass die Ergänzung ein Quadrat sey. Folglich ist der Punkt* K *bekannt, mithin auch wegen des gegebenen Punktes* G *die Linie* GK *der Lage nach.*

Determination. Weil aber zur Construction erfordert wird, dass GL : FO *gleich dem gegebenen Verhältnisse gemacht und an* LO *ein dem* ▭ ML . FO *gleiches Rechteck entworfen werde, dessen Ergänzung ein Quadrat sey, nämlich* ▭ LKO, *so dass man hierdurch den Punkt* K *in* LO *erhält: so wird diess nicht unter allen Umständen geschehen können. Daher wird auch die Auflösung des Problems nicht immer und in allen Fällen möglich seyn.*

Nur auf eine Weise aber wird sie geschehen, wenn der Punkt K *die Mitte der* LO *ist. Der Punkt* K *aber, welcher das äusserste Verhältniss angiebt, wird folgendermassen erforscht werden.*

Setzen wir, jenes äusserste Verhältniss sey GL : FO, *und halbiren* LO *in* K: *so muss* ▭ LKO = ▭ ML . FO *seyn. Es bleibt uns also nur ein solcher Punkt* O *in* LF *zu suchen, dass, wenn* LO *in* K *halbirt wird,* ▭ LKO = ▭ ML . FO *ist. Wenn nun also* ▭ ML . FO = ▭ LKO, *so ist* FO : OK = KL : LM *und* comp. FK : KO *oder* KL = KM : ML. *Die Summe der Vorderglieder hat aber zur Summe der Hinterglieder dasselbe Verhältniss, mithin ist* FM : MK = KM : ML. *Daher ist* MK *die mittlere Proportionale zwischen den gegebenen* LM, MF; *es ist also* MK *der Grösse und Lage nach gegeben und, weil der Punkt* M *gegeben ist, auch der Punkt* K. *Wegen des bekannten Punktes* L *ist daher die Linie* LK *gegeben, welcher*

KO *gleich ist. Folglich ist die Linie* KO *der Grösse und Lage nach gegeben und somit wegen des gegebenen Punktes* K *auch der Punkt* O *das ist der gesuchte Punkt.*

Die Construction wird also folgende seyn. Es bleibe das Vorige nebst der Parallele; nimm MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM, MF *und mache* OK = KL. *Der Punkt* O *wird aber diesseit des Punktes* F *fallen, weil* FK > KL *ist. Denn weil* FM : MK = KM : ML, *so wird auch die Differenz der Vorderglieder zur Differenz der Hinterglieder dasselbe Verhältniss haben, das ist, es wird* FM : MK = FK : KL *seyn. Nun ist das Vorderglied grösser als das Hinterglied, folglich ist* FK > KL. *Verbinde* GK *und verlängere sie: so behaupte ich, dass* ▭ ML . FO = ▭ LKO *und* MH : FK = GL : FO *sey. Denn weil* MK *die mittlere Proportionale ist zwischen* LM, FM, *so ist* FM : MK = KM : ML *und, wenn man die Differenzen der homologen Glieder nimmt, wird der Rest* FK *zum Reste* KL, *das ist zu* KO *in demselben Verhältnisse oder wie* KM : ML *seyn. Daher ist* divid. FO : OK = KL : LM, *also* ▭ ML . FO = ▭ LKO. *Ferner weil* KM : ML = FK : KO, *ist* convert. MK : KL, *das ist* MH : GL = KF : FO *und* perm. MH : FK = GL : FO. *Es wird also richtig construirt, wenn* MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM, MF *genommen und* KGH *verbunden wird.*

Jetzt ist zu untersuchen, ob die Linie HGK *ein grösseres oder kleineres Verhältniss als jede andere Linie abschneide, die aus* G *nach* MA, FM *gezogen werden kann. Diess wird auf folgende Art bestimmt. Mache* MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM, MF *und verbinde* KGH: *so ist zu untersuchen, ob die Linie* HK *ein grösseres oder kleineres Verhältniss* MH : FK *abschneide als jede andere aus* G *nach* MA, FM *mögliche gerade Linie. Mache* OK = KL,

so ist □ML . FO = □LKO *und* MH : FK = GL : FO. *Ziehe nun eine andere Linie, wie* PQ, *so ist das Verhältniss* MP : FQ *zu vergleichen mit* MH : FK, *das ist mit* GL : FO *und* perm. MP : GL, *oder* MQ : QL *mit* QF : FO, *also* divid. ML : LQ *mit* QO : OF *und* □ML . FO *mit* □LQO. *Es ist aber* □ML . FO = □LKO; *es werde also* □LKO *mit* □LQO *verglichen. Nun ist offenbar* □LKO > □LQO, *weil* LK = KO *und daher* LK^2 > □LQO *) *ist. Es ist aber* □LKO = □ML . FO. *Folglich ist* □ML . FO > □LQO, *also* ML : LQ > QO : OF *und* comp. MQ : QL, *oder* MP : GL > QF : FO, *also* perm. MP : FQ > GL : FO *das ist* > MH : FK. *Die Linie* HK *schneidet also ein kleineres Verhältniss als* PQ *ab; woraus hervorgeht, dass unter allen aus* G *nach* MA, FM *möglichen Linien* HK *das kleinste Verhältniss abschneidet.*

Ich behaupte aber auch, dass die der HK *näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihr entfernteren.* **) *Denn weil* MH : FK, *oder* GL : FO *kleiner ist als* MP : FQ, *so sey* GL : FZ = MP : FQ, *so wird* FZ < FO *seyn und aus dem Vorigen erhellet, dass* □ML . FZ = □LQZ *ist. Ziehe nun eine andere gerade Linie, wie* RS, *und vergleiche* MP : FQ, *oder* GL : FZ *mit* MR : FS *und* perm. MR : GL, *oder* MS : SL *mit* SF : FZ, *also* divid. ML : LS *mit* SZ : ZF *und* □ML . FZ *mit* □LSZ. *Es ist aber* □ML . FZ = □LQZ, *vergleiche also* □LQZ *mit* □LSZ. *Ausserdem werde auch* □LKZ *verglichen mit* □LQZ *oder, weil* □LQZ = □ML . FZ *ist,* □LKZ *mit* □ML . FZ. *Nun ist aber klar, dass* □LKZ > □ML . FZ, *weil* □ML . FO > □ML . FZ *ist. Denn es ist* □ML . FO *gleich* □LKO, *welches kleiner*

---

*) *Die Worte „und daher* LK^2 > □LQO" *scheinen mir ein Glossem zu seyn.*

**) *Dieser Satz fehlt im Lat. Der folgende fängt aber richtig an mit* Quoniam „autem".

ist als das Rechteck LKZ; *folglich ist das Rechteck* LKZ *grösser als das Rechteck* ML . FO *und um so mehr grösser als das Rechteck* ML . FZ. *Da nun* ▭ ML . FZ = ▭ LQZ, *so ist* ▭ LKZ > ▭ LQZ. *Hieraus aber folgt, dass* ▭ LQZ > ▭ LSZ, *also auch* ▭ ML . FZ > ▭ LSZ *ist. Daher ist* ML : LS > SZ : ZF *und* comp. MS : SL, *oder* MR : GL > SF : FZ, *also* perm. MR : FS > GL : FZ, *oder* > MP : FQ. *Die Linie* PQ *bestimmt also ein kleineres Verhältniss als* RS. *Folglich schneiden die der* HK *näheren geraden Linien immer kleinere Verhältnisse ab als die von ihr entfernteren.*

Synthesis. Nimm MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM, MF *und verbinde* KGH: *so schneidet diese Linie* HK *ein kleineres Verhältniss* MH : FK *ab als jede andere aus* G *nach* MA, FM *gehende gerade Linie. Das gegebene Verhältniss ist aber entweder gleich* MH : FK, *oder kleiner, oder grösser. Ist es gleich demselben, so genügt* HK *der Aufgabe und offenbar allein, weil alle durch den Punkt* G *gezogenen Linien grössere Verhältnisse als* HK *bestimmen. Ist es kleiner, so ist die Aufgabe unmöglich; weil ein Verhältniss kleiner als das kleinste abgeschnitten werden soll. Wenn aber das Verhältniss grösser als* MH : FK *ist, wie* m : n, *so mache* OK = KL; *dann wird* ▭ ML . FO = ▭ LKO *und* MH : FK = GL : FO *seyn. Da nun* m : n *grösser ist als* MH : FK *oder als* GL : FO, *so sey* GL : FZ = m : n; *so ist* FZ < FO. *Nun ist* ▭ ML . FO = ▭ LKO, *folglich ist* ▭ ML . FZ < ▭ LKZ. *Daher wird sich an* LZ *ein dem* ▭ ML . FZ *gleiches Rechteck entwerfen lassen, dessen Ergänzung ein Quadrat ist; und zwar auf zweierlei Weise, nämlich zu beiden Seiten des Punktes* K. *Hierdurch erhält man die gesuchten Punkte* Q, q. *Verbinde also* GQ, Gq *und verlängere sie: so behaupte ich, dass jede der Linien* GQ, Gq *der Aufgabe genüge oder dass die Verhält-*

nisse MP : FQ *und* Mp : Fq *gleich* m : n *seyen. Denn weil* ▭ ML . FZ = ▭ LQZ, *so ist* ML : LQ = QZ : ZF, *also* comp. (MQ : QL, *das ist* MP : GL = QF : FZ) *) *und dann* perm. MP : FQ = GL : FZ *das ist* = m : n. *Folglich löst* PQ *die Aufgabe. Eben so aber wird gezeigt, dass die Linie* pq *dasselbe leiste. Folglich lösen beide Linien die Aufgabe; und es ist klar, dass die der* HK *zu beiden Seiten näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihr entfernteren.*

Das Gränzverhältniss aber wird so bestimmt. Es ist MH : FK = GL : FO. *Nun ist* FO *der Überschuss der Linien* LM, MF *über* LM, MO *zusammengenommen;* LM, MO *zusammen aber sind gleich der doppelten* MK, *weil* OK = KL *ist; und das Quadrat der doppelten* MK *ist gleich dem vierfachen* ▭ LMF, *denn* MK *ist die mittlere Proportionale zwischen* LM, MF. *Folglich ist das kleinste Verhältniss gleich dem Verhältnisse der* GL *zu dem Überschusse, um welchen* LM, MF *zusammengenommen diejenige Linie übertreffen, deren Quadrat gleich* 4 ▭ LMF *ist.*

Cas. III. Fig. 24. *Analysis. Es werde nun nach der dritten Art die Linie* HK *gezogen, welche von* MB, FM *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Mache* GL : FO = MH : FK. *Weil* GL *gegeben ist, so ist die Linie* FO *sowohl der Grösse als der Lage nach gegeben. Wegen des gegebenen Punktes* F *ist daher der Punkt* O *und somit die Linie* LO *gegeben. Weil nun* MH : FK = GL : FO, *so ist* perm. MH : GL, *das ist* MK : KL = KF : FO, *also* comp. ML : LK = KO : OF *und* ▭ ML . FO = ▭ LKO. *Es ist aber* ▭ ML . FO *gegeben, weil beide Seiten bekannt sind; also auch* ▭ LKO. *Entwirft man also dieses Rechteck an* LO *so, dass der Überschuss ein*

---

*) *Die eingeklammerte Proportion fehlt im Lat.*

Quadrat ist, so erhält man den Punkt K. *Und da auch der Punkt* G *gegeben wird, so ist die Linie* HK *der Lage nach gegeben.*

Synthesis. *Das gegebene Verhältniss sey* m : n. *Mache* GL : FO = m : n *und entwirf an* LO *ein dem* ▭ ML . FO *gleiches Rechteck, dessen Überschuss ein Quadrat sey, nämlich das* ▭ LKO. *Verbinde* GK *und verlängere sie nach* H. *Ich behaupte, dass die Linie* HK *die Aufgabe löse, oder dass* MH : FK = m : n *sey. Denn weil* ▭ ML . FO = ▭ LKO, *so ist* ML : LK = KO : OF, *also* divid. MK : KL, *das ist* MH : GL = KF : FO *und* perm. MH : FK = GL : FO *oder* = m : n. *Die Linie* GH *löst also die Aufgabe, ich behaupte aber auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie wie* GP. *Schneidet nun die Linie* GP *dasselbe Verhältniss* m : n *ab, so ist* MH : FK = MP : FQ. *Diess ist aber nicht möglich, weil das Vorderglied* kleiner *ist* als *das* Vorderglied, *und das Hinterglied grösser als das Hinterglied; woraus hervorgeht, dass* GP *ein kleineres Verhältniss als* GH *abschneide.*

Es ist also klar, dass die dem Punkte M *näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren* *).

Cas. IV. Fig. 25. *Analysis.* *Es werde endlich nach der vierten Art die Linie* GK *gezogen, welche von* MA, FD *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Mache* GL : FO = MH : FK, *so ist, weil* GL *bekannt ist, die Linie* FO *der Grösse und Lage nach gegeben. Wegen des Punktes* F *ist also der Punkt* O *und somit, weil auch der Punkt* L *bekannt ist, die Linie* LO *gegeben. Weil nun* GL : FO = MH : FK, *so ist* perm. GL : MH, *das ist* LK : KM = OF : FK *und* convert. KL : LM = FO : OK,

---

*) *Dieser Satz fehlt im Lat.*

mithin ▭ ML . FO = ▭ LKO. Es ist aber ▭ ML . FO gegeben, also auch ▭ LKO. Entwirft man also dasselbe an der Linie LO, so dass die Ergänzung ein Quadrat ist, so erhält man den Punkt K; und da der Punkt G gegeben wird, so ist die Linie GK der Lage nach gegeben.

Determination. Weil aber zur Construction erfordert wird, dass GL : FO in dem gegebenen Verhältnisse genommen und an LO ein dem ▭ ML . FO gleiches Rechteck, nämlich ▭ LKO, so entworfen werde, dass die Ergänzung ein Quadrat sey: so kann, aus früher angeführten Gründen, diese Entwerfung nicht immer geschehen, wenn nicht das Verhältniss innerhalb bestimmter Gränzen ist; und es ist daher die Auflösung des Problems nicht immer möglich.

Nur auf eine Weise aber wird sie geschehen, wenn der Punkt K die Mitte der LO ist. Die Analysis *) ist folgende. Um das Gränzverhältniss zu bestimmen, setzen wir es gleich GL : FO und halbiren LO in K, so dass dann ▭ ML . FO = ▭ LKO ist. Es muss daher in FD ein solcher Punkt O gefunden werden, dass nach Halbirung der LO in K das ▭ ML . FO gleich ▭ LKO ist. Es sey also ▭ ML . FO = ▭ LKO, so ist FO : OK = KL : LM und divid. FK : KO = KM : ML. Da nun LK = KO, so ist auch FK : KL = KM : ML. Nun hat aber die Differenz der Vorderglieder zur Differenz der Hinterglieder dasselbe Verhältniss, folglich ist FM : MK = KM : ML. Daher ist MK die mittlere Proportionale zwischen LM, MF. Weil nun beide Linien LM, MF gegeben sind, so ist MK der Grösse und Lage nach gegeben. Wegen des gegebenen Punktes L ist also die LK bekannt, welcher KO gleich ist; mithin ist auch KO der Grösse und Lage nach

*) Diess ist die einzige Stelle, wo im Lat. das Wort Analysis gebraucht ist.

gegeben. Es ist aber der Punkt K *bekannt, folglich auch der Punkt* O, *welcher der gesuchte Punkt ist.*

Die Aufgabe wird also auf folgende Weise gelöst werden. Nimm MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM, MF, *mache* OK = KL *und verbinde* GK. *Ich behaupte, dass* □ ML . FO = □ LKO *und* MH : FK = GL : FO *sey. Denn weil* FM : MK = KM : ML *und die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder dasselbe Verhältniss hat, so ist* FK : KL = KM : ML. *Nun ist* LK = KO, *mithin* FK : KO = KM : ML *und* comp. FO : OK = KL : LM. *Daher ist* □ ML . FO = □ LKO. *Ferner weil* FO : OK = KL : LM, *so ist* convert. OF : FK *wie* LK : KM, *oder wie* GL : MH, *mithin* perm. GL : FO = MH : FK. *Es wird also richtig construirt, wenn* MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM, MF *genommen und* GHK *verbunden wird.*

Jetzt ist zu untersuchen, ob die Linie GK *ein kleineres oder grösseres Verhältniss* MH : FK *als jede andere aus* G *nach* MA, FD *mögliche Linie abschneide. Diess wird auf folgende Weise bestimmt. Nimm* MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM, MF *und verbinde* GK: *so ist zu untersuchen, ob die Linie* GK *ein grösseres oder kleineres Verhältniss* MH : FK *als jede andere Linie abschneide, die aus* G *nach* MA, FD *gezogen werden kann. Mache* OK = KL, *so ist* □ ML . FO = □ LKO *und* MH : FK = GL : FO. *Ziehe nun eine andere Linie, wie* GQ, *und vergleiche das Verhältniss* MH : FK, *oder* GL *zu* FO *mit* MP : FQ *und* perm. *das Verhältniss* GL *zu* MP, *oder* LQ : QM *mit* OF : FQ, *also* convert. QL : LM *mit* FO : OQ, *mithin* □ ML . FO *mit* □ LQO. *Es ist aber* □ LKO = □ ML . FO, *vergleiche also* □ LKO *mit* □ LQO. *Nun ist aber klar, dass* □ LKO > □ LQO *sey. Daher wird, weil* □ LKO = □ ML . FO *ist, auch* □ ML . FO > □ LQO *seyn. Folglich ist* QL : LM

$< FO : OQ$ *und* convert. $LQ : QM$, *oder* $GL : MP > OF : FQ$, *mithin* perm. $GL : FO > MP : FQ$. *Die Linie* GK *schneidet also ein grösseres Verhältniss als* GQ *ab. Hieraus geht aber hervor, dass unter allen aus* G *nach* MA, FD *möglichen geraden Linien* GK *das grösste Verhältniss* $MH : FK$ *abschneide.*

Ich behaupte ausserdem, dass die der GK *näheren geraden Linien grössere Verhältnisse abschneiden als die von ihr entfernteren. Denn weil* $MH : FK$, *oder* $GL : FO > MP : FQ$ *ist, so sey* $GL : FZ = MP : FQ$, *so wird* $FZ > FO$ *seyn und aus dem Vorigen folgt, dass* □ ML . FZ = □ LQZ *ist. Ziehe nun eine andere gerade Linie, wie* GS, *und vergleiche* $MP : FQ$, *oder* $GL : FZ$ *mit* $MR : FS$, *also* perm. $GL : MR$, *oder* $LS : SM$ *mit* $ZF : FS$ *und* convert. $SL : LM$ *mit* $FZ : ZS$, *mithin* □ ML . FZ *mit* □ LSZ. *Auch werde* □ LKZ *verglichen mit* □ LQZ. *Nun ist* □ LQZ = □ ML . FZ, *daher werde das Rechteck* LKZ *mit dem Rechtecke* ML . FZ *verglichen. Es ist aber klar, dass* □ LKZ > □ ML . FZ *ist. Denn weil*

□ LK . OZ > □ ML . OZ
und □ LK . KO = □ ML . FO

ist, so wird das ganze □ LKZ *grösser seyn als das ganze* □ ML . FZ *oder als* □ LQZ. *Hieraus aber folgt, dass auch* □ LQZ > □ LSZ, *also* □ ML . FZ > □ LSZ *ist. Folglich ist* $SL : LM < FZ : ZS$ *und* convert. $LS : SM$, *oder* $GL : MR > ZF : FS$, *also* perm. $GL : FZ$, *oder* $MP : FQ > MR : FS$; *mithin schneidet* GQ *ein grösseres Verhältniss als* GS *ab. Die der* GK *näheren geraden Linien schneiden also grössere Verhältnisse ab als die von ihr entfernteren.*

Synthesis. Nimm MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM, MF *und verbinde* GK. *Diese Linie* GK *schneidet das Verhältniss* $MH : FK$ *ab, welches grösser ist als jedes andere durch irgend eine Linie aus* G *nach* MA, FD. *Das zur Construction*

gegebene Verhältniss aber wird entweder das Verhältniss MH : FK, oder grösser, oder kleiner als dasselbe seyn. Ist es gleich dem Verhältnisse MH : FK, dann genügt die Linie GHK der Aufgabe. Ist das Verhältniss grösser als MH : FK, so ist die Auflösung nicht möglich; weil das gegebene Verhältniss grösser ist als das grösste. Wenn aber das gegebene Verhältniss m : n kleiner ist als MH : FK, so mache OK = KL; alsdann ist ▭ ML . FO = ▭ LKO und MH : FK = GL : FO. Mache GL : FZ = m : n, so wird FZ > FO seyn; und weil

▭ LK . OZ > ▭ ML . OZ
und ▭ LK . KO = ▭ ML . FO,

so ist das ganze ▭ LKZ grösser als das ganze ▭ ML . FZ. Folglich lässt sich an LZ ein dem ▭ ML . FZ gleiches Rechteck entwerfen, dessen Ergänzung ein Quadrat ist, und zwar auf zweierlei Weise, nämlich zu beiden Seiten des Punktes K. Dadurch erhält man die gesuchten Punkte Q, q. Verbinde nun GQ, Gq; ich behaupte, dass jede der Linien GQ, Gq der Aufgabe genüge, oder dass MP : FQ = m : n, so wie Mp : Fq = m : n sey. Denn weil ▭ ML . FZ = ▭ LQZ, so ist FZ : ZQ = QL : LM und convert. ZF : FQ = LQ : QM oder = GL : MP. Daher ist perm. GL : FZ = MP : FQ. Nun ist GL : FZ = m : n, folglich ist MP : FQ = m : n. Auf dieselbe Art aber wird bewiesen, dass Mp : Fq = m : n sey. Folglich genügen beide Linien GQ, Gq der Aufgabe. Auch ist klar, dass die der GK zu beiden Seiten näheren geraden Linien grössere Verhältnisse abschneiden als die von ihr entfernteren.

Das grösste Verhältniss aber wird auf folgende Weise bestimmt. Das grösste Verhältniss ist gleich MH : FK oder GL : FO. Die Linie FO aber besteht aus den beiden Linien FK, KL zusammengenommen (weil OK = KL ist); FK, KL aber sind gleich den Linien LM, MF nebst dem Doppelten der MK zu-

sammengenommen, und das Quadrat der doppelten MK *ist gleich dem vierfachen* ▭ LMF. *Folglich ist das Verhältniss* GL : FO *gleich dem Verhältnisse der* GL *zu der Linie, welche besteht aus* LM, MF *und derjenigen, deren Quadrat gleich* 4 ▭ LMF *ist.* *)

Wir haben also die Composition des Problems bei jeder möglichen Beschaffenheit des gegebenen Verhältnisses gelehrt und gezeigt, ob die Construction möglich sey oder nicht. Nimm (Fig. 26) *die mittlere Proportionale zwischen* LM, MF *und trage sie auf* CD *zu beiden Seiten des Punktes* M, *wie* Mk, MK; *ziehe die Linien* Gk, GK *und mache* ok = kL, *so wie* OK = KL. *Alsdann ist* Mh : Fk *oder* GL : Fo *das kleinste Verhältniss nach der zweiten Art, und* MH : FK *oder* GL *zu* FO *das grösste nach der vierten. Es ist aber klar, dass* **) GL : Fo > GL : FO *ist. Das gegebene Verhältniss ist nun entweder das Verhältniss* GL : Fo, *oder kleiner als* GL : Fo *und grösser als* GL : FO, *oder grösser als* GL : Fo, *oder gleich* GL : FO, *oder kleiner als das letztere. — Ist nun das Verhältniss gleich* GL : Fo, *so wird das Problem auf dreierlei Weise gelöst werden, nämlich nach der ersten und dritten Art, und einfach nach der zweiten; nicht aber nach der vierten, weil das Verhältniss* GL : Fo *grösser ist als das Verhältniss* GL : FO. — *Ist es aber kleiner als* GL : Fo *und grösser als* GL : FO, *dann wird zwiefach construirt werden, nämlich nach der ersten und dritten Art; nicht aber nach der zweiten, weil das Verhältniss kleiner als das kleinste; auch nicht nach der vierten, weil es grösser ist als das grösste. — Wenn das Verhältniss grösser ist als* GL : Fo, *dann*

---

*) *Im Lat. folgt hier noch:* vel minor erit ea.

**) *Hier folgt noch im Lat.:* juxta modum secundum

kann vierfach construirt werden, nämlich nach der ersten und dritten Art, und doppelt nach der zweiten; nicht aber nach der vierten, weil das gegebene Verhältniss, da es grösser als GL : Fo *ist, noch viel grösser ist als* GL : FO. — *Wenn es aber gleich ist dem Verhältnisse* GL : FO, *so wird die Aufgabe auf dreierlei Weise gelöst, nämlich nach der ersten und dritten Art, und einfach nach der vierten; nicht aber nach der zweiten, weil das Verhältniss* GL : FO *kleiner ist als das kleinste oder als* GL : Fo. — *Endlich wenn es kleiner als* GL : FO *ist, so kann das Problem vierfach gelöst werden, nämlich nach der ersten und dritten Art und doppelt nach der vierten; nicht aber nach der zweiten, weil das gegebene Verhältniss kleiner ist als das kleinste. Wir haben also das Problem nach allen seinen Verschiedenheiten aufgelöst.*

Des

APOLLONIUS VON PERGA

vom

Verhältnissschnitt

Zweites Buch.

Es seyen zwei gerade Linien der Lage nach gegeben, wie *AB*, *CD*, welche sich in *M* schneiden; in *AB* werde der Punkt *E* und in *CD* der Punkt *F* genommen; und der gegebene Punkt *G* sey zuerst im Winkel *CMB*. Die durch *G* gehenden geraden Linien, welche Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneiden, lassen sich auf fünf Arten ziehen, entweder nämlich nach *EB*, *FD*; oder nach *EB*, *FM*; oder nach *EA*, *FC*; oder nach *EM*, *FC*; oder endlich nach *EB*, *FC*.

Cas. I. Fig. 27. *Analysis. Es werde nun nach der ersten Art die Linie* GK *gezogen, welche von* EB, FD *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Verbinde* GE. *Weil die Punkte* G, E *gegeben sind, so ist die Linie* GE *der Lage nach gegeben; es ist aber auch* CD *der Lage nach gegeben, folglich ist der Durchschnittspunkt* N *gegeben. Durch den Punkt* N *ziehe der* AB *eine Parallele* TU. *Weil nun diese Linie durch den gegebenen Punkt* N *geht und der gegebenen* AB *parallel ist: so ist die Linie* TU *selbst der Lage nach gegeben. Es sind also die Linien* EG, GN *wegen der bekannten Punkte* E, N, G *gegeben, mithin das Verhältniss* EG : GN, *das ist* EH : NP. *Nun wird aber das Verhältniss* EH : FK *gegeben; folglich ist das Verhältniss* NP : FK *bekannt. Es werden also zwei gerade Linien* TU, CD *der Lage nach gegeben, in* TU *wird der Punkt*

N, *in* CD *der Punkt* F *genommen, und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* CNU. *Es ist daher eine gerade Linie wie* GK *zu ziehen, welche von jenen Linien das gegebene Verhältniss* NP : FK *abschneide. Die Linie* GK *ist also, weil jenes Verhältniss bekannt ist, gegeben vermittelst Fall* 4, I *des ersten Buches.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Nimm* m : p = EG : GN. *Es werden aber zwei Linien in derselben Ebene, nämlich* TU, CD, *gegeben; in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* CNU. *Ziehe also, wie in Fall* 4, I *gelehrt wird, die Linie* GHK, *welche das Verhältniss* NP : FK *gleich* p : n *abschneide; ich behaupte, dass diese Linie* GHK *die Aufgabe löse. Denn weil* EG : GN = EH : NP *und* m : p = EG : GN, *so ist*

$$EH : NP = m : p.$$

Es ist aber . . . . . . NP : FK = p : n,

folglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : n. *Mithin löst die Linie* GK *die Aufgabe, und zwar allein.*

Cas. II. Fig. 28. *Analysis. Es werde nun nach der zweiten Art die Linie* GK *gezogen, welche von* EB, FM *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Verbinde* EG, *welche der* CD *im Punkte* N *begegne; und durch den gegebenen Punkt* N *ziehe die Linie* TU *der* AB *parallel, welche also der Lage nach gegeben ist. Weil nun die Punkte* E, N, G *gegeben sind, so sind die Linien* EG, GN, *also auch ihr Verhältniss gegeben. Weil aber* EG : GN = EH : NP, *so ist das Verhältniss* EH : NP, *mithin, weil das Verhältniss* EH : FK *gegeben wird, auch das Verhältniss* NP : FK *gegeben. Es werden also zwei gerade Linien in derselben Ebene gegeben, nämlich* TU, CD; *in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* CNU.

Es ist daher die Linie GK *zu ziehen, welche vermittelst Fall* 4, II *des ersten Buches gegeben seyn wird.*

Determination. Zur Composition ist aber erforderlich, dass das gegebene Verhältniss grösser sey als EM : MF. *Denn weil* EH > EM, *aber* FK < FM: *so ist* EH : EM > FK : FM *und* perm. EH : FK > EM : MF. *Das gegebene Verhältniss muss also grösser als* EM : MF *seyn.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n *grösser als* EM : MF. *Verbinde* GE, GM, *(ziehe durch* N *der* AB *eine Linie* TU *parallel, welche die* GM *in* J *schneide)* *) *und mache* m : p = EG : GN. *Weil nun* EG : GN = m : p *und* EM : NJ = EG : GN, *so ist*

EM : NJ = m : p.

Es ist aber . . . . . . EM : MF < m : n,

folglich ist aus dem Gleichen NJ : MF < p : n. *Wenn also nach Fall* 4, II *aus* G *eine gerade Linie gezogen wird, welche von* TU, FN *ein Verhältniss gleich* p : n *abschneidet: so wird sie die Linie* FM *treffen, das ist jenseit* **) *des Punktes* M *fallen. Denn wäre sie dem Punkte* N *näher, so würde sie ein kleineres Verhältniss abschneiden. Die Construction ist aber dieselbe wie in Fall* 4, II. *Es schneide also die Linie* GK *das Verhältniss* NP : FK *gleich* p : n *ab; ich behaupte, dass* GK *die Aufgabe löse. Denn weil* EG : GN = m : p, *und* EH : NP *wie* EG : GN, *so ist auch*

EH : NP *wie* m : p.

Nun ist . . . . . . NP : FK *wie* p : n,

folglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : n. *Mithin löst die Linie* GK *die Aufgabe, und zwar allein.*

Cas. III ***). Fig. 29. *Analysis. Es werde nun nach der dritten Art die Linie* GH *gezogen, welche von* EA, FC *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem ge-*

---

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

**) *nämlich in Bezug auf den Punkt* N.

***) Cas. III *und* IV *folgen in verkehrter Ordnung auf einander.*

gebenen abschneide. Verbinde EG. *Weil die Punkte* E, G *gegeben sind, so ist die Linie* EG *gegeben. Es wird aber* CD *der Lage nach gegeben, also der Punkt* N. *Durch* N *ziehe der* AB *eine Parallele, wie* TU, *so ist die Linie* TU *der Lage nach gegeben. Weil nun* *) *die Punkte* E, N, G *gegeben sind, so sind es auch die Linien* EG, GN, *mithin ihr Verhältniss. Es ist aber* EG : GN = EH : NP, *mithin ist das Verhältniss* EH : NP *gegeben. Nun wird aber auch* EH : FK *gegeben, folglich ist das Verhältniss* NP : FK *gegeben. Es werden also zwei gerade Linien in derselben Ebene gegeben, nämlich* TU, CD; *in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; und der Punkt* G, *aus welchem die schneidende Linie zu ziehen ist, liegt im W.* CNU. *Es ist also die Linie* GP *zu ziehen, welche das Verhältniss* NP : FK *abschneide. Mithin ist die Linie* GPH *vermittelst Fall* 4, III *des ersten Buches gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n, *und mit Beibehaltung des Vorigen mache* m : p = EG : GN. *Da nun in derselben Ebene die geraden Linien* TU, CD *der Lage nach gegeben werden; in* TU *der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen wird; und der gegebene Punkt* G *im W.* CNU *liegt: so ziehe nach Fall* 4, III *die Linie* GP, *welche das Verhältniss* NP : FK = p : n *abschneide, und verlängere sie nach* H. *Ich behaupte, dass die Linie* GH *der Aufgabe genüge. Denn es ist* EG : GN = m : p, *mithin ist auch*

EH : NP = m : p.

Nun ist aber . . . NP : FK = p : n,

folglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : n. *Demnach löst die Linie* GH *die Aufgabe und zwar allein.*

---

*) *Im Lat. steht unrichtig:* Datis autem recta *TU*, punctisque *E*, *N*, *G*.

Cas. IV. Fig. 30. *Analysis. Es werde nun nach der vierten Art die Linie* GH *gezogen, welche von* EM, FC *die Segmente* EH, FK *in dem gegebenen Verhältnisse abschneide. Verbinde* GE. *Da die Punkte* G, E *gegeben sind, so ist die Linie* GE *gegeben. Es ist aber* CD *gegeben, also der Punkt* N. *Durch den Punkt* N *ziehe der* AB *eine Linie* TU *parallel, so ist die Linie* TU *der Lage nach gegeben. Weil nun die Punkte* E, N, G *gegeben sind, so sind es auch die Linien* EG, GN, *mithin das Verhältniss* EG : GN. *Es ist aber* EG : GN = EH : NP, *daher ist das Verhältniss* EH : NP *gegeben. Nun wird aber auch* EH : FK *gegeben, folglich ist das Verhältniss* NP : FK *gegeben. Es werden also zwei gerade Linien* TU, CD *in derselben Ebene der Lage nach gegeben; in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* CNU. *Es ist daher eine gerade Linie, wie* GH, *zu ziehen, welche das Verhältniss* NP : FK *abschneide. Folglich ist die Linie* GH *vermittelst Fall* 4, II *des ersten Buches gegeben.*

Determination. Zur Construction aber ist erforderlich, dass das gegebene Verhältniss kleiner als EM : MF *sey. Denn weil* ME > EH *und* MF < FK, *so ist* ME : EH > MF : FK *und* perm. EM : MF > EH : FK. *Es ist aber* EH : FK *das gegebene Verhältniss, folglich muss das zur Construction gegebene Verhältniss kleiner als* EM : MF *seyn.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n, *kleiner als* EM : MF. *Verbinde* GM *und mache* m : p = EG : GN. *Weil nun* EM : NJ = EG : GN, *und* EG : GN = m : p, *so ist*

EM : NJ = m : p.

Es ist aber . . . . . . EM : MF > m : n,

folglich ist, wenn man die Hinterglieder vergleicht, NJ : FM > p : n. *Die Linie also, welche aus* G *gezo-*

gen wird und von NU, FN *ein Verhältniss gleich* p : n *abschneidet, wird die* MN *treffen.* (*Denn es sind zwei gerade Linien* TU, CD *gegeben; in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* CNU. *Wird also nach Fall* 4, II *die Linie* GM *gezogen, welche das Verhältniss* NJ : FM, *das grösser ist als* p : n, *abschneidet, und wird hierauf verlangt eine andere, wie* GK, *zu ziehen, welche ein dem Verhältnisse* p : n *gleiches Verhältniss abschneide: so wird diese Linie diesseit des Punktes* M *fallen, oder zwischen die Punkte* M *und* N;) *) *weil, wie in der genannten Stelle gelehrt wird, die dem Punkte* N *näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren. Verlängere nun* GK *nach* H; *ich behaupte, dass* GH *die Aufgabe löse. Denn es ist* EG : GN = EH : NP, *mithin ist*

EH : NP *wie* m : p.

Es ist aber . . . . . NP : FK *wie* p : n,

folglich aus dem Gleichen EH : FK = m : n. *Die Linie* GH *genügt also der Aufgabe.*

Cas. V. Fig. 31. *Analysis. Es werde nach der fünften Art die Linie* HK *gezogen, welche von* EB, FC *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Verbinde* GE, *so ist wegen der gegebenen Punkte* G, E *die Linie* GE *gegeben, also, weil auch* CD *der Lage nach gegeben wird, der Punkt* N. *Ziehe nun durch den Punkt* N *die Linie* TU *mit* AB *parallel, so ist die Lage der* TU *bekannt. Weil aber die Punkte* E, N, G *gegeben sind, so hat man die Linien* EG, GN *und das Verhältniss derselben. Nun ist* EG : GN = EH : NP, *mithin ist das Verhältniss* EH : NP *gegeben. Es wird aber das Verhältniss*

---

*) *Die eingeklammerten Sätze können entbehrt werden.*

EH : FK *gegeben, folglich auch das Verhältniss* NP : FK. *Es werden also zwei gerade Linien* TU, CD *der Lage nach gegeben; in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* CNU. *Es ist daher eine gerade Linie zu ziehen, wie* GK, *welche von jenen Linien das Verhältniss* NP : FK *abschneide. Folglich ist die Linie* GK *vermittelst Fall* 4, IV *des ersten Buches der Lage nach gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n *und es werde* m : p = EG : GN *genommen. Es sind nun zwei gerade Linien* TU, CD *in derselben Ebene der Lage nach gegeben; in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* CNU *und das abzuschneidende Verhältniss ist* p : n. *Es werde also nach Fall* 4, IV *die Linie* GK *gezogen, welche die Segmente* NP, FK *in dem Verhältnisse* p : n *abschneide* *), *und sie werde nach* H *verlängert. Ich behaupte, dass die Linie* HPK *die Aufgabe löse. Denn es ist* EG : GN = EH : NP, *und* EG : GN = m : p, *mithin ist*

EH : NP = m : p.

Nun ist aber . . . . . NP : FK = p : n,

folglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : n.

Fall 2.

Es sind zwei unbegränzte gerade Linien der Lage nach gegeben, wie *AB*, *CD*, welche sich im Punkte *M* schneiden, und in *AB* wird der Punkt *E*, in *CD* aber der Punkt *F* genommen. Der gegebene Punkt *G* liege im W. *DMB* und die durch *G* mit *AB* parallel gezogene Linie gehe erstlich durch den Punkt *F*. Die aus *G* ausgehenden Linien lassen sich auf vier

*) *Im Lat. folgt hier noch:* datur itaque recta *PK*.

Arten ziehen; entweder nämlich werden die Segmente in *EB*, *FD* genommen; oder in *EA*, *FC*; oder in *EM*, *MF*; oder endlich in *EB*, *FC*.

Cas. I. Fig. 32. *Analysis. Es werde nun erstlich nach der ersten Art die Linie* HGK *gezogen, welche von* EB, FD *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Verbinde* GE. *Da die Punkte* G, E *und die Linie* CD *der Lage nach gegeben sind, so ist die Linie* GE *und der Punkt* N *gegeben. Zieht man nun durch den Punkt* N *eine Linie, wie* TU, *der* AB *parallel, so ist auch* TU *der Lage nach bekannt. Es sind aber die Linien* EG, GN *gegeben, mithin das Verhältniss derselben. Nun ist* EG : GN = EH : NP, *daher ist das Verhältniss* EH : NP *ebenfalls bekannt. Es wird aber das Verhältniss* EH : FK *gegeben, folglich auch das Verhältniss* NP : FK. *Es werden also zwei gerade Linien in derselben Ebene der Lage nach gegeben, nämlich* TU, CD; *in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* DNU, *und die durch* G *der* TU *parallel gezogene Linie geht durch* F. *Es ist also die Linie* GK *zu ziehen, welche ein dem Verhältnisse* NP : FK *gleiches Verhältniss abschneide. Folglich ist die* KGH *vermittelst Fall* 5, I *des ersten Buches der Lage nach gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Nimm* m : p = EG : GN. *Es werden nun in derselben Ebene zwei gerade Linien gegeben, nämlich* TU, CD; *in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* DNU *und das abzuschneidende Verhältniss ist* p : n. *Ziehe also nach Fall* 5, I (*weil die Parallele durch den Punkt* F *geht*) *die Linie* GK, *welche das Verhältniss* NP : FK *gleich dem gegebenen* p : n *abschneide, und verlängere die Linie* KGP *nach* H: *so behaupte*

ich, dass sie der Aufgabe genüge. Denn weil EG : GN = EH : NP *und auch* EG : GN = m : p, *so ist*

EH : NP = m : p.

Es ist aber . . . . NP : FK = p : n,

folglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : n, *mithin löst die Linie* HGK *die Aufgabe.*

Cas. II. Fig. 33. *Analysis. Es werde nun nach der zweiten Art die Linie* GH *gezogen, welche von* EA, FC *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Verbinde* GE, *und da der Punkt* N *gegeben ist, ziehe durch denselben eine Linie mit* AB *parallel, wie* TNU; *so ist die Linie* TNU *der Lage nach bekannt. Es ist aber das Verhältniss* EG : GN *gegeben, mithin auch, weil* EH : NP = EG : GN *ist, das Verhältniss* EH : NP. *Nun wird aber das Verhältniss* EH : FK *gegeben, folglich ist es auch das Verhältniss* NP : FK. *Es werden also zwei gerade Linien* TU, CD *der Lage nach gegeben; in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* DNU, *und die Parallele geht durch den Punkt* F. *Es ist also eine Linie, wie* GK, *zu ziehen, welche von* NT, FC *das Verhältniss* NP : FK *abschneide. Diese Linie* GKP *ist aber vermittelst Fall* 5, II *des ersten Buches der Lage nach gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n *und es werde* m : p *gleich* EG : GN *gemacht. Es sind aber zwei gerade Linien in derselben Ebene gegeben, nämlich* TU, CD; *in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* DNU; *die Parallele geht durch den Punkt* F *und das gegebene Verhältniss ist* p : n. *Es werde also nach Fall* 5, II *die gerade Linie* GKP *gezogen, welche das Verhältniss* NP : FK *gleich* p : n *abschneide. Verlängere sie nach* H; *ich behaupte, dass die Linie* GH *die Aufgabe löse. Denn weil*

EG : GN = EH : NP *und auch* EG : GN = m : p, *so ist*
EH : NP = m : p.
Es ist aber . . . . . NP : FK = p : n,
folglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : n. *Die Linie* GKH *löst also die Aufgabe.*

Cas. III. Fig. 34. *Analysis. Es werde nach der dritten Art die Linie* GH *gezogen, welche von* EM, MF *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Verbinde* GE *und ziehe durch* N *die Linie* TU *der* AB *parallel, so ist* TNU *der Lage nach gegeben. Weil aber* EG : GN = EH : NP, *so ist das Verhältniss* EH : NP *gegeben; folglich, weil das Verhältniss* EH : FK *gegeben wird, ist auch das Verhältniss* NP : FK *bekannt. Es werden also in derselben Ebene zwei gerade Linien der Lage nach gegeben, nämlich* TU, CD; *und in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; der gegebene Punkt* G *aber liegt im W.* DNU *und die Parallele geht durch den Punkt* F. *Es ist daher die Linie* GK *zu ziehen, welche das Verhältniss* NP : FK *gleich einem gegebenen abschneide. Folglich ist die Linie* GK, *welche das Verlangte leisten wird, vermittelst Fall* 5, III *des ersten Buches der Lage nach gegeben.*

Determination. Die Linie FN *wird entweder kleiner seyn als* NM, *oder nicht kleiner* *). *Sie sey aber erstlich nicht kleiner als* NM. *Verbinde* GM, *so behaupte ich, dass die Linie* GM *ein grösseres Verhältniss* EM : MF *abschneide als jede andere, welche aus* G *nach* EM, MN *gezogen werden kann. Denn ziehe eine andere Linie wie* GKH. *Weil* FN *nicht kleiner ist als* NM, *so wird das durch* GM *abgeschnittene Verhältniss* NJ : FM *um so grösser seyn, je näher* GM *der das grösste Verhältniss abschneidenden*

---

*) *Im Lat. steht unrichtig:* vel major. *Derselbe Fehler findet sich in der Synthesis.*

Linie ist; mithin grösser als das durch GKH abgeschnittene, wie diess in Fall 5, III des ersten Buches bewiesen worden ist. Es ist also NJ : FM > NP : FK und perm. NJ : NP > FM : FK. Nun ist NJ : NP = EM : EH, mithin ist auch EM : EH > FM : FK und perm. EM : MF > EH : FK. Die Linie GM schneidet also ein grösseres Verhältniss EM : MF ab als jede aus G nach EM, MN mögliche gerade Linie.

Wenn aber FN kleiner ist als NM, so sey KN = NF. Verbinde GK und verlängere sie nach H, ziehe auch GM. Ich behaupte, dass die Linie GKH ein grösseres Verhältniss EH : FK abschneide als jede andere, die aus G nach EM gezogen werden kann; die Linie GM aber ein kleineres EM : MF als jede beliebige aus G nach HM mögliche Linie. Denn ziehe eine andere Linie, wie GRQ, welche die EH trifft. Weil nun FN = NK, so ist die Linie GKH der Lage nach gegeben und schneidet nach Fall 5, III des ersten Buches das grösste Verhältniss NP : FK ab; mithin ist, wie daselbst bewiesen wird, NP : FK > NS : FR. Daher ist perm. NP : NS > FK : FR. Es ist aber NP : NS = EH : EQ, folglich ist EH : EQ > FK : FR und perm. EH : FK grösser als EQ : FR. Ebenso wird bewiesen, dass, wenn irgend eine andere Linie aus G nach HM gezogen wird, die Linie GKH das grösste Verhältniss EH : FK abschneide. Ich behaupte ausserdem, dass GM ein kleineres Verhältniss EM : MF als jede andere Linie abschneide, die aus G nach HM, MK gezogen werden kann. Denn ziehe eine andere Linie nach HM wie GZWV. Da GH das grösste Verhältniss abschneidet und die Linie GWV derselben näher ist als GM: so ist NZ : FW > NJ : FM und perm. NZ : NJ > FW : FM. Es ist aber NZ : NJ = EV : EM, folglich ist auch EV : EM > FW : FM und perm. EV : FW > EM : MF, mithin EM : MF < EV : FW. Die Linie GK schneidet also unter allen aus G nach EM möglichen Linien das grösste Verhältniss EH : FK

ab, die Linie GM *aber ein kleineres* EM : MF *als jede andere, die aus* G *nach* HM *gezogen werden kann.*

Synthesis. Die Linie FN *ist entweder kleiner oder nicht kleiner als* NM. *Es sey nun zuerst* FN *nicht kleiner als* NM. *Verbinde* GM, *so schneidet* GM *ein grösseres Verhältniss* EM : MF *ab als jede andere Linie, die aus* G *nach* EM *gezogen werden kann. Ist nun das zur Construction gegebene Verhältniss gleich* EM : MF, *so wird die Linie* GM *der Aufgabe genügen. Ist aber das Verhältniss grösser als* EM : MF, *so wird das Problem nicht gelöst werden, weil die Linie* GM *das grösste Verhältniss* EM : MF *abschneidet. Wenn es aber kleiner ist als* EM : MF, *so wird nur eine Auflösung möglich seyn. Es sey also das Verhältniss* m : n *kleiner als* EM : MF *gegeben; mache* m : p = EG : GN *und ziehe durch den Punkt* N *die Linie* TNU *der* AB *parallel. Weil nun* EG : GN = EM : NJ *und auch* EG : GN = m : p, *so ist* EM : NJ = m : p *und* invert.

$$NJ : EM = p : m.$$

Es ist aber . . . . EM : MF > m : n,

folglich ist aus dem Gleichen NJ : FM > p : n. *Es werden also zwei gerade Linien* TU, CD *der Lage nach gegeben; in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; die Parallele geht durch den Punkt* F; *die Linie* FN *ist nicht kleiner als* NM *und das Verhältniss* p : n *ist kleiner als das grösste* NJ : FM, *welches* GM *abschneidet. Ziehe also nach Fall* 5, III *aus* G *eine Linie, welche von* NU, FM *ein Verhältniss gleich* p : n *abschneide. Diess kann aber auf zweierlei Weise geschehen; jedoch wird nur eine von beiden Linien die* MN *treffen, indem die andere jenseit des Punktes* M *fällt. Es sey nun* GPK *jene Linie, welche das Verhältniss* NP : FK *gleich* p : n *abschneidet; ich behaupte, dass die Linie*

GPKH *die Aufgabe löse. Denn es ist* EG : GN = EH : NP *und* EG : GN = m : p, *mithin ist*

EH : NP = m : p.

Nun ist . . . . NP : FK = p : n,

folglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : n *und die Linie* GH *genügt also der Aufgabe.*

Es sey nun FN *kleiner als* NM. *Mache* KN = NF, *verbinde* GK *und verlängere sie nach* H, *ziehe auch* GM: *so schneidet* GKH *das Verhältniss* EH : FK *ab, welches grösser ist als jedes andere, das durch irgend eine Linie aus* G *nach* EM *abgeschnitten werden kann; die Linie* GM *dagegen ein kleineres Verhältniss* EM : MF *als jede andere aus* G *nach* HM *mögliche Linie.* [*Denn die Linie* GKH *schneidet (nach Fall* 5, III) *ein Verhältniss* NP : FK *ab, welches grösser ist als* NJ : FM; *verwechselt also wird das Verhältniss* NP : NJ *grösser seyn als das Verhältniss* FK : FM. *Es ist aber* NP : NJ = EH : EM, *folglich ist* perm. EH : FK > EM : MF. *Die Linie* GH *also schneidet das Verhältniss* EH : FK *ab grösser als jedes andere durch irgend eine Linie aus* G *nach* EM. *Die Linie* GM *dagegen bestimmt das Verhältniss* EM : MF, *welches kleiner ist als jedes andere, das durch irgend eine Linie aus* G *nach* HM *abgeschnitten werden kann. Denn ziehe eine Linie* GZW. *Weil diese Linie der das grösste Verhältniss abschneidenden näher ist als* GM, *so wird* GZW *ein grösseres Verhältniss als* GM *abschneiden. Daher ist* NZ : FW > NJ : FM, perm. *also wird das Verhältniss* NZ : NJ *grösser als das Verhältniss* FW : FM *seyn. Es ist aber* NZ : NJ = EV : EM, *folglich ist* perm. EV : FW > EM : MF; *mithin schneidet* GM *das kleinste Verhältniss ab.*] *) *Wenn also zur Construction ein Verhältniss gegeben wird, welches gleich*

---

*) *Der eingeklammerte Satz ist offenbar ein Glossem.*

ist EH : FK, *so genügt die Linie* GH *allein der Aufgabe, weil das Verhältniss das grösste ist. Ist es grösser, so ist die Auflösung nicht möglich, weil es grösser als das grösste ist. Wenn das Verhältniss kleiner ist als* EH : FK, *aber grösser als* EM : MF, *so kann das Problem auf zweierlei Weise gelöst werden, nämlich zu beiden Seiten der* GKH. *Ist es aber nicht grösser als* EM : MF, *dann wird nur auf eine Weise construirt, nämlich zwischen* H *und* E. *Es sey nun zuerst das gegebene Verhältniss* m : n *kleiner als* EH : FK, *aber grösser als* EM : MF. *Mache* m : p = EG : GN, *so ist auch* EH : NP = m : p *und* invert.

NP : EH = p : m.

Es ist aber . . . . . EH : FK > m : n,

folglich ist aus dem Gleichen NP : FK > p : n. *Ferner, weil* EG : GN = m : p *und auch* = EM : NJ, *so ist* EM : NJ = m : p *und* invert.

NJ : EM = p : m.

Es ist aber . . . . . . EM : MF < m : n,

folglich ist aus dem Gleichen NJ : FM < p : n. *Wir haben also bewiesen, das das Verhältniss* NP : FK *grösser sey als* p : n, *und die Linie* GK *scheidet, wie in Fall* 5, III *gezeigt worden ist, das grösste Verhältniss ab. Wenn also nach Fall* 5, III *aus* G *gerade Linien gezogen werden, welche von* NJ, FC *Segmente in dem Verhältnisse* p : n *abschneiden: so erhält man zwei Linien, nämlich auf beiden Seiten der* GH. *Eine derselben, wie* GSQ, *wird die* NK *treffen; ich behaupte, dass die andere der* KM *begegne. Denn weil die der* GH *näheren geraden Linien immer grössere Verhältnisse abschneiden als die von ihr entfernteren, und das Verhältniss* p : n *grösser als* NJ : FM *ist: so wird die aus* G *gezogene Linie, welche das Verhältniss* p : n *abschneidet, der* GH *näher seyn als die Linie* GM. *Ist also die Linie*

GZW *so gezogen und nach* V *verlängert, so behaupte ich, dass auch sie der Aufgabe Genüge leiste. Denn es ist* EG : GN, *das ist* EV : NZ = m : p *und* NZ : FW = p : n, *folglich ist aus dem Gleichen* EV : FW = m : n. *Die Linie* GWV *genügt also der Aufgabe; und es ist klar, dass die andere oder* GSQ *dasselbe leiste.*

Endlich sey das gegebene Verhältniss m : n *nicht grösser als* EM : MF. *Nimm* m : p = EG : GN, *so erhellet aus der vorhergehenden Untersuchung, dass das Verhältniss* p : n *nicht grösser als* NJ : FM, *mithin gewiss kleiner als* NP : FK *sey. Weil also* p : n *kleiner ist als* NP : FK *das ist als das grösste Verhältniss: so ziehe nach Anleitung von Fall* 5, III *zwei gerade Linien zu beiden Seiten der* GPH, *welche ein dem Verhältnisse* p : n *gleiches Verhältniss abschneiden. Die eine derselben wird zwischen* GK, GE *fallen, die andere aber die* KMC *treffen. Weil aber jede der* GK *nähere gerade Linie ein grösseres Verhältniss abschneidet als die von ihr entferntere, und das Verhältniss* p : n, *weil es nicht grösser als* NJ : FM *ist, entweder gleich ist demselben oder kleiner: so wird, wenn es gleich demselben ist, die Linie* GM *das Verlangte leisten; wenn es aber kleiner ist als* NJ : FM, *die Linie jenseit der* GM *fallen, mithin, da sie* EM *nicht trifft, der Aufgabe nicht genügen. Die andere Linie dagegen, welche zwischen* GE, GKH *fällt, wird das Problem lösen.*

Cas. IV. Fig. 35. *Analysis. Es werde nun nach der vierten Art die Linie* GK *gezogen, welche von* EB, FC *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Verbinde* GE *und durch den bekannten Punkt* N *ziehe eine Linie wie* TNU *der* AB *parallel: so ist* TU *der Lage nach gegeben. Weil nun das Verhältniss* EG : GN *oder* EH : NP *gegeben ist und das Verhältniss* EH : FK *gegeben wird, so ist auch das Verhältniss* NP : FK

gegeben. Es werden also zwei gerade Linien TU, CD *der Lage nach gegeben; in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* DNU *und die Parallele geht durch* F. *Es ist daher die gerade Linie* GPK *zu ziehen, welche das Verhältniss* NP : FK *abschneide. Folglich ist diese Linie vermittelst Fall* 5, III *des ersten Buches der Lage nach gegeben.*

Determination. Die Linie FN *kann entweder grösser oder nicht grösser* *) *als* NM *seyn. Sie sey nun zuerst nicht grösser als* NM. *Verbinde* GM; *ich behaupte, die Linie* GM *schneide das Verhältniss* EM : MF *ab grösser als jedes andere durch irgend eine Linie aus* G *nach* MC. *Denn ziehe eine andere, wie* GPK. *Da* FN *nicht grösser ist als* NM, *so wird* GM *entweder das grösste Verhältniss* NJ : MF *abschneiden oder der das grösste abschneidenden näher als* GK *seyn. Daher ist* NJ : FM > NP : FK *und* perm. NJ : NP > FM : FK. *Nun ist* NJ : NP = EM : EH, *folglich ist* EM : EH > FM : FK *und* perm. EM : MF > EH : FK. *Die Linie* GM *schneidet also ein grösseres Verhältniss* EM : MF *ab als jede andere aus* G *nach* MC *mögliche gerade Linie.*

Es sey nun FN *grösser als* NM. *Mache* KN = NF *und verbinde* GK: *so behaupte ich, dass* GK *ein grösseres Verhältniss* EH : FK *abschneide als jede andere Linie, welche aus* G *nach* MC *gezogen werden kann. Denn ziehe zwei Linien zu beiden Seiten der* GK, *wie* GW, GR. *Weil* FN = NK, *so schneidet nach Fall* 5, III *die Linie* GK *das grösste Verhältniss* NP : FK *ab.* [*Denn die Linien* TU, CD *werden der Lage nach gegeben; in* TU *wird der Punkt* N, *und in* CD *der Punkt* F *gegeben; die durch* G *gezogene*

---

*) *Im Lat. steht unrichtig:* vel minor. *Derselbe Fehler ist in der Synthesis.*

Parallele trifft den Punkt F *und es ist* KN = NF.] *)
Daher ist NP : FK > NS : FR *und* perm. NP : NS > FK : FR. *Es ist aber* NP : NS = EH : EQ, *also* EH : EQ > FK : FR. *Folglich ist* perm. *das Verhältniss* EH : FK *grösser als das Verhältniss* EQ : FR. *Aus denselben Gründen wird bewiesen, dass die andere Linie* GW *ein kleineres Verhältniss als* GK *abschneide. Folglich schneidet die Linie* GK *ein grösseres Verhältniss* EH : FK *ab als jede andere aus* G *nach* MC *mögliche Linie. Ich behaupte ausserdem, dass das Verhältniss* EM : MF, *welches* GM *bestimmt, kleiner sey als jedes andere durch eine beliebige Linie aus* G *nach* KM. *Denn die Linie* GW *ist der das grösste Verhältniss abschneidenden oder der* GK *näher als die Linie* GM; *daher ist* NZ : FW > NJ : FM *und* perm. NZ : NJ > FW : FM. *Es ist aber* NZ : NJ = EV : EM, *folglich ist* EV : EM > FW : FM *und* perm. EV : FW > EM : MF. *Die Linie* GM *schneidet also ein kleineres Verhältniss* EM : MF *ab als jede andere Linie, die aus* G *nach* KM *gezogen werden kann.*

Synthesis. Die Linie FN *kann entweder grösser oder nicht grösser als* NM *seyn. Es sey nun zuerst* FN *nicht grösser als* NM. *Verbinde* GM, *so wird diese Linie ein grösseres Verhältniss* EM : MF *abschneiden als jede beliebige Linie, welche aus* G *nach* MC *möglich ist. Wenn nun das gegebene Verhältniss gleich ist* EM : MF, *so löst* GM *allein die Aufgabe, indem sie nämlich jenes grösste Verhältniss abschneidet. Ist das gegebene Verhältniss grösser, dann kann das Problem nicht gelöst werden, weil das gegebene Verhältniss grösser ist als das grösste. Wenn aber ein kleineres gegeben wird, so ist die*

---

*) *Die eingeklammerten Worte scheinen ein Glossem zu seyn.*

Auflösung möglich, aber nur auf eine Weise. Es sey also das gegebene Verhältniss m : n *kleiner als* EM : MF. *Nimm* m : p = EG : GN. *Da nun* EG : GN = EM : NJ, *so ist auch* EM : NJ = m : p *und* invert.

NJ : EM = p : m.

Es ist aber . . . . EM : MF > m : n,

folglich ist aus dem Gleichen p : n *kleiner als* NJ : FM, *das ist kleiner als das grösste Verhältniss. Ziehe also nach Fall* 5, III *zwei gerade Linien, zu beiden Seiten der* GM, *welche von* NJ, FC *das Verhältniss* p : n *abschneiden. Aber nur eine derselben, wie* GK, *welche das Verhältniss* NP : FK *gleich* p : n *bestimmt, wird die* MC *treffen; ich behaupte, dass die Linie* GK *das Verlangte leiste. Denn es ist* EG : GN = m : p *und* EH : NP = EG : GN, *mithin auch*

EH : NP = m : p.

Ferner ist . . . . NP : FK = p : n,

folglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : n, *und desshalb löst* GK *die Aufgabe. Die andere Linie aber wird die* MC *nicht treffen und desshalb dem Probleme nicht genügen, welches daher nur auf die angegebene Art construirt werden kann.*

Die Linie FN *sey nun grösser als* NM. *Mache* KN = NF *und verbinde* GM, GK. *Weil* KN = NF, *wird* GK *ein grösseres Verhältniss* EH : FK *abschneiden als jede andere aus* G *nach* MC *mögliche Linie;* GM *dagegen ein kleineres* EM : MF *als jede beliebige Linie, die nach* KM *gezogen werden kann. Ist nun das gegebene Verhältniss gleich* EH : FK, *so löst* GK *allein die Aufgabe. Wird ein grösseres als* EH : FK *gegeben, dann kann das Problem nicht construirt werden, weil das gegebene Verhältniss grösser als das grösste ist. Wenn ein Verhältniss gegeben wird, welches kleiner ist als* EH : FK, *grösser aber als* EM : MF, *so kann die Aufgabe auf zweierlei Weise construirt werden, weil sich zwei gerade Linien, zu beiden Sei-*

ten der GK, *nach* MC *ziehen lassen, welche dem Probleme Genüge leisten. Ist aber das Verhältniss nicht grösser als* EM : MF, *dann hat die Aufgabe nur eine Auflösung. Es sey nun das gegebene Verhältniss* m : n *kleiner als* EH : FK, *aber grösser als* EM : MF. *Mache* m : p = EG : GN. *Weil nun* EG : GN = EH : NP, *so ist auch* EH : NP = m : p *und* invert.

NP : EH = p : m.

Nun ist aber . . . . . EH : FK > m : n,

folglich ist aus dem Gleichen NP : FK > p : n. *Ferner weil* EG : GN = EM : NJ *und* EG : GN = m : p, *so ist*

EM : NJ = m : p.

Es ist aber . . . . EM : MF < m : n,

folglich ist invert. *und aus dem Gleichen* NJ : FM < p : n. *Das Verhältniss* p : n *ist also kleiner als* NP : FK *und grösser als* NJ : FM. *Es ist aber* NP : FK *das grösste nach Fall* 5, III. *Ziehe also zwei gerade Linien durch den Punkt* G, *zu beiden Seiten der* GK, *welche die* MC *treffen und von den Linien* NU, FC *Verhältnisse gleich dem gegebenen oder gleich* p : n *abschneiden. Es seyen diess die Linien* GR, GW, *ich behaupte, dass jede derselben das Problem löse. Denn weil* EG : GN = m : p *und* EQ : NS = EG : GN, *so ist auch*

EQ : NS = m : p.

Nun ist aber . . . . . NS : FR = p : n,

folglich ist aus dem Gleichen EQ : FR = m : n *und* GR *löst die Aufgabe. Aus gleichen Gründen wird bewiesen, dass auch die andere Linie* GW *dem Probleme genüge. Dass aber die Linie* GW *nicht jenseit* *) *der* GM *falle, wird so bewiesen. Weil das Verhältniss* p : n *kleiner ist als* NP : FK, *welches nämlich gleich ist dem grössten Verhältnisse (nach Fall* 5, III*), grösser aber als* NJ : FM, *welches die*

---

*) *nämlich in Beziehung auf* GK.

Linie GM *abschneidet; die Linien aber, welche der das grösste Verhältniss abschneidenden näher sind, grössere Verhältnisse bestimmen als die von derselben entfernteren: so wird die Linie* GW, *welche das Verhältniss* p : n *abschneidet, der* KM *begegnen.*

Es sey nunmehr das gegebene Verhältniss m : n *nicht grösser als* EM : MF, *so ist klar, dass das Verhältniss* p : n *nicht grösser sey als* NJ : FM, *also gewiss kleiner als* NP : FK *oder als das grösste. Ziehe also nach Fall* 5, III *zwei gerade Linien, zu beiden Seiten der* GK, *welche ein dem Verhältnisse* p : n *gleiches Verhältniss abschneiden. Die eine derselben wird die* MC *treffen und desshalb der Aufgabe genügen, wie im Vorhergehenden bewiesen worden ist; die andere aber wird das Problem nicht lösen, weil sie nicht der* KM *sondern der* MN *begegnet. Denn weil die der* GK *näheren geraden Linien grössere Verhältnisse bestimmen als die von ihr entfernteren und das Verhältniss* p : n *kleiner* *) *als* NJ : FM *ist: so wird die andere Linie weiter als* GM *von* GK *entfernt seyn und desshalb die* MN *treffen.*

Fall 3.

Es treffe nun die Linie, welche durch den Punkt *G* der *AB* parallel gezogen wird, die andere Linie *CD* diesseit des Punktes *F* oder zwischen demselben und dem Punkte *M*, wie die Linie *GL*; so ist klar, dass aus *G* auf fünf verschiedene Arten gerade Linien gezogen werden können.

Cas. I. Fig. 36. *Analysis. Es werde zuerst eine Linie gezogen nach der ersten Art, welche die Segmente* EH *und* FK *in dem gegebenen Verhältnisse*

---

*) *Sorgfältiger gearbeitet ist der Schluss der Synthesis in* Cas III.

abschneide. Verbinde GE *und durch den Punkt* N *ziehe eine Linie der* AB *parallel, wie* TNU. *Weil das Verhältniss* EG : GN *bekannt ist, so ist es auch* EH : NP; *und weil das Verhältniss* EH : FK *gegeben wird, so ist auch das Verhältniss* NP : FK *gegeben. Es sind also zwei gerade Linien der Lage nach gegeben* TU, CD; *in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* DNU. *Es ist daher eine gerade Linie* HGK *zu ziehen, welche das gegebene Verhältniss* NP : FK *abschneide; mithin ist die Linie* HGK *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 7, I, *woselbst keine Gränze statt findet. Die Construction aber erhellet aus der dort vorgetragenen Auflösung.*

Cas. II. Fig. 37. *Analysis. Es werde nach der zweiten Art die Linie* HK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Weil das Verhältniss* EH : NP, *so wie das Verhältniss* NP : FK *gegeben ist, so ist die Linie* HK *durch Fall* 7, II *der Lage nach gegeben.*

Determination. Nimm NK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LN *und* NF, *verbinde* GK *und verlängere sie nach* H: *ich behaupte, dass die Linie* HK *ein kleineres Verhältniss* EH : FK *abschneide als jede andere, die aus* G *nach* LF *gezogen werden kann. Denn ziehe eine andere, wie* QGR. *Weil* NK *die mittlere Proportionale ist zwischen* LN *und* NF, *so ist* $NP : FK < NS : FR$ *und* perm. $NP : NS < FK : FR$. *Es ist aber* $NP : NS = EH : EQ$, *folglich* $EH : EQ < FK : FR$ *und* perm. $EH : FK < EQ : FR$. *Die Linie* HK *schneidet also ein kleineres Verhältniss* EH : FK *ab als jede andere Linie, die aus* G *nach* LF *gezogen werden kann.*

Synthesis. Mache NK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LN *und* NF, *verbinde* GK *und verlängere sie nach* H: *so schneidet* HK *ein kleineres*

Verhältniss EH : FK *ab als jede andere aus* G *nach* LF *mögliche Linie. Ist nun das zur Construction gegebene Verhältniss gleich* EH : FK, *dann löst* HK *allein die Aufgabe. Ist es kleiner, so ist die Auflösung nicht möglich. Ist es aber grösser, so wird auf zweierlei Weise construirt werden, nämlich zu beiden Seiten der* HK. *Es sey also das gegebene Verhältniss* m : n *grösser als* EH : FK. *Mache* m : p = EG : GN, *so wird aus dem Gleichen geschlossen, dass* p : n *grösser als* NP : FK *sey.* *) *Hieraus folgt, dass sich aus dem Punkte* G *zwei gerade Linien, zu beiden Seiten der* HK, *ziehen lassen, welche von* NP, FL *Verhältnisse gleich* p : n *abschneiden; und aus früheren Beweisen erhellet, dass diese so gezogenen Linien die Aufgabe lösen.*

Cas. III. Fig. 38. *Analysis. Es werde jetzt nach der dritten Art eine Linie gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Weil das Verhältniss* EH : NP *und auch das Verhältniss* NP : FK *gegeben ist: so ist die Linie* GH *der Lage nach gegeben, vermittelst Fall* 7, III, *woselbst keine Gränze statt findet. Die Construction ist daher deutlich.*

Cas. IV. Fig. 39. *Analysis. Es werde nun nach der vierten Art die Linie* GH *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Weil das Verhältniss* EH : NP *bekannt ist, so ist auch das Verhältniss* NP : FK *und somit die Linie* GH *der Lage nach gegeben. Die Aufgabe kommt nämlich auf Fall* 7, IV *zurück.*

Determination. Nimm die mittlere Proportionale zwischen LN *und* NF. *Diese wird entweder kleiner oder nicht kleiner als* NM *seyn. Sie sey zu-*

*) *Im Lat. folgt hier noch:* Sed ratio *NS* ad *FR* major est ea; quia *NK* media proportionalis est inter *FN* et *NL*. *Diess ist vielleicht so zu verbessern:* Sed ratio *NP* ad *FK* est minima; quia etc.

erst nicht kleiner als NM. *Verbinde* GM, *so behaupte ich, dass die Linie* GM *ein grösseres Verhältniss* EM : MF *abschneide als jede beliebige Linie, welche aus* G *nach* EM *gezogen werden kann. Denn ziehe eine andere Linie, wie* GH. *Weil die mittlere Proportionale zwischen* LN, NF *nicht kleiner ist als* NM, *so wird die Linie* GM *entweder das grösste Verhältniss* NJ : FM *abschneiden oder der das grösste abschneidenden näher seyn als die Linie* GH. *Daher ist* NJ : FM > NP : FK *und* perm. JN : NP *grösser als* FM : FK. *Es ist aber* JN : NP = ME : EH, *folglich ist* ME : EH > FM : FK *und* perm. EM : MF > EH : FK. *Die Linie* GM *schneidet also ein grösseres Verhältniss* EM : MF *ab als jede andere aus* G *nach* EM *gehende Linie.*

Es sey nun die mittlere Proportionale zwischen LN, NF *kleiner als* NM, *wie* NK. *Verbinde* GM, GK *und verlängere* GK *nach* H. *Ich behaupte, dass* GH *ein grösseres Verhältniss* EH : FK *abschneide als jede andere Linie, welche sich aus* G *nach* EM *ziehen lässt;* GM *aber ein kleineres* EM : MF *als jede nach* HM *mögliche Linie. Denn ziehe zwei gerade Linien wie* GV, GQ. *Weil* NK *die mittlere Proportionale ist zwischen* LN *und* NF, *so schneidet die Linie* GK *das grösste Verhältniss ab. Es ist also* NP : FK > NS : FR *und* perm. NP : NS > FK : FR. *Nun ist* NP : NS = EH : EQ, *folglich ist* EH : EQ > FK : FR *und* perm. EH : FK > EQ : FR. *Und ebenso wird bewiesen, dass jenes Verhältniss grösser als* EV : FW *sey. Die Linie* GH *schneidet demnach ein Verhältniss* EH : FK *ab, welches grösser ist als jedes Verhältniss durch irgend eine Linie, welche aus* G *nach* EM *gezogen werden kann. Ich behaupte ausserdem, dass die Linie* GM *ein Verhältniss* EM : MF *bestimme, kleiner als jedes Verhältniss, welches durch eine beliebige Linie, die aus* G *gezogen wird und* HM

trifft, abgeschnitten werden kann. Denn weil GV *näher ist der* GH, *welche das grösste Verhältniss abschneidet, als die Linie* GM; *und die jener Linie näheren immer grössere Verhältnisse bestimmen: so ist* NZ : FW > NJ : FM *und* perm. NZ : NJ > FW : FM. *Es ist aber* NZ : NJ = EV : EM, *folglich ist* EV : EM > FW : FM *und* perm. EV : FW > EM : MF. *Die Linie* GH *schneidet also unter allen aus* G *nach* EM *möglichen geraden Linien das grösste Verhältniss* EH : FK *ab*, GM *aber ein kleineres als jede andere Linie, welche die* HM *allein trifft.*

Synthesis. Die mittlere Proportionale zwischen LN, NF *ist entweder kleiner als* NM *oder nicht kleiner. Sie sey zuerst nicht kleiner. Verbinde* GM, *so schneidet diese Linie ein grösseres Verhältniss* EM : MF *ab als jede andere, die aus* G *nach* EM *gezogen werden kann. Ist also das zur Construction gegebene Verhältniss gleich* EM : MF, *so wird* GM *und zwar allein das Verlangte leisten. Ist es grösser, so ist die Auflösung nicht möglich* *). *Wenn es aber kleiner ist, so wird das Problem nur auf eine Weise construirt werden. Es sey also das gegebene Verhältniss* m : n *kleiner als* EM : MF. *Mache* m : p = EG : GN, *so wird sich aus dem Gleichen beweisen lassen, dass* p : n *kleiner als* NJ : FM *sey. Folglich können aus* G *zwei gerade Linien gezogen werden, welche von* EM, MF *ein Verhältniss gleich* p : n *abschneiden. Diese Linien werden zu beiden Seiten der* GM *fallen; und es ist klar, dass die eine von jenen Linien, welche verlängert* EM *trifft, die Aufgabe löse, nicht aber die andere. Folglich wird nur auf eine Weise construirt.*

Es sey nun die mittlere Proportionale zwischen LN, NF *kleiner als* NM; *sie sey* NK. *Verbinde* GM,

---

*) *Dieser Satz fehlt im Lat.*

GK *und verlängere* GK *nach* H. *Dann schneidet unter allen aus* G *nach* EM *möglichen Linien* GH *das grösste Verhältniss* EH : FK *ab; die Linie* GM *aber ein kleineres Verhältniss* EM : MF *als jede andere Linie, die aus* G *nach* HM *gezogen werden kann. Ist nun zur Construction ein Verhältniss gleich* EH : FK *gegeben, so ist klar, dass* GH *allein die Aufgabe löse. Ist das gegebene Verhältniss grösser, so ist die Auflösung nicht möglich. Wenn es kleiner als* EH : FK, *grösser aber als* EM : MF *ist, so kann, wie aus dem Vorigen erhellet, auf doppelte Weise construirt werden, nämlich durch zwei Linien nach* EH, HM *zu beiden Seiten der* GH. *Wenn das gegebene Verhältniss gleich ist* EM : MF, *so erhellet ebenfalls aus der vorhergehenden Determination, dass das Problem auf zweierlei Weise gelöst werden könne, nämlich durch* GM *und durch eine andere Linie, wie* GQ. *Wenn aber das Verhältniss kleiner ist als* EM : MF, *dann wird eine von beiden Linien jenseit der* GM *fallen und also der Aufgabe nicht genügen.*

Cas. V. Fig. 40. *Analysis. Es werde nun nach der fünften Art die Linie* GK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Weil das Verhältniss* EH : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : FK *und desshalb die Linie* GK *der Lage nach gegeben vermittelst der in der vierten Art des siebenten Falles gelehrten Construction. Hier findet aber eine Determination statt.*

Determination. Weil die mittlere Proportionale zwischen LN, NF *grösser oder nicht grösser* *) *als* NM *seyn kann, so sey sie zuerst nicht grösser als* NM. *Verbinde* GM, *so ist aus den vorhergehenden Gränzbestimmungen klar, dass unter allen aus* G *nach* MC *möglichen geraden Linien* GM *das grösste*

---

*) *Im Lat. steht:* vel minor.

Verhältniss EM : MF *abschneide. Wenn aber die mittlere Proportionale zwischen* LN, NF *grösser ist als* NM, *wie* NK: *so verbinde* GK, GM. *Dann folgt aus den vorigen Gränzbestimmungen, dass* GK *ein grösseres Verhältniss* EH : FK *abschneide als jede andere Linie, die aus* G *nach* NC *gezogen werden kann;* GM *aber unter allen nach* KM *möglichen das kleinste* EM : MF.

Synthesis. Die mittlere Proportionale zwischen LN, NF *wird entweder grösser seyn als* NM *oder nicht grösser. Sie sey erstlich nicht grösser. Verbinde* GM, *welche ein grösseres Verhältniss* EM : MF *abschneidet als jede andere aus* G *nach* MC *gezogene Linie. Ist nun das zur Construction gegebene Verhältniss gleich* EM : MF, *so löst* GM *die Aufgabe allein. Ist es grösser, so ist die Auflösung nicht möglich. Wenn es aber kleiner ist, so erhellet aus dem Vorigen, dass nur eine Linie nach* MC *gezogen werden könne, welche dem Probleme Genüge leistet.*

Wenn aber NK, *die mittlere Proportionale zwischen* LN *und* NF, *grösser ist als* NM: *so verbinde* GK, GM; *dann wird* GK *ein Verhältniss* EH : FK *abschneiden, welches grösser ist als jedes andere durch irgend eine Linie, die aus* G *gezogen wird und verlängert die* MC *trifft; die Linie* GM *dagegen wird (unter allen nach* MK *möglichen Linien)* *) *das kleinste Verhältniss abschneiden, nämlich das Verhältniss* EM : MF. *Wird nun zur Construction ein Verhältniss gegeben, welches gleich ist* EH : FK, *so wird offenbar* GK *allein die Aufgabe lösen; und ist es grösser, so ist die Auflösung nicht möglich. Ist es kleiner als* EH : FK *und grösser als* EM : MF, *so erhellet aus dem Vorhergehenden, dass das Problem auf zweierlei Weise gelöst werden könne durch Linien, die zu beiden Seiten der* GK *nach* MC *gezogen werden. Wenn*

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

es aber kleiner ist als EM : MF, *so kann, wie aus den vorhergehenden Gränzbestimmungen folgt, die Aufgabe nur auf eine Weise gelöst werden, nämlich durch eine Linie nach* KC. *Endlich wenn das Verhältniss gleich* EM : MF *ist, so giebt es zwei Auflösungen, indem sowohl* GM *als auch eine zweite Linie, welche die* MC *jenseit des Punktes* K *trifft, das Verlangte leistet. Alles dieses ergiebt sich aus den frühern Beweisen.*

Fall 4.

Es falle nunmehr die durch *G* mit *AB* parallel gezogene Linie jenseit des Punktes *F*, so dass *F* zwischen ihr und dem Punkte *M* sey; diese Parallele sey *GL*. Die durch *G*, *F* gezogene Linie aber wird verlängert die *AB* entweder im Punkte *E* selbst treffen; oder zwischen ihm und dem Punkte *A*; oder zwischen ihm und dem Punkte *M*. Sie falle aber zuerst zwischen *E* und *A*, wie die Linie *GN*: so ist klar, dass die durch *G* gehenden Linien auf fünf verschiedene Arten gezogen werden können.

Cas. I. Fig. 41. *Analysis. Es werde also nach der ersten Art die gerade Linie* HGK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Durch den Punkt* N *ziehe eine Linie der* MF *parallel, und verlängere* HK *bis zum Punkte* P. *Weil der Punkt* F *gegeben ist, so ist die Linie* NFG *der Lage nach gegeben; es wird aber auch* AB *der Lage nach gegeben, also ist der Punkt* N *bekannt; mithin ist auch die Linie* TNP, *welche der* CD *parallel ist, der Lage nach gegeben. Weil das Verhältniss* NG : GF *bekannt ist, so ist es auch das Verhältniss* NP : FK. *Es wird aber das Verhältniss* EH : FK *gegeben, folglich ist auch das Verhältniss* NP : EH *gegeben. Es werden also zwei gerade Linien* AB, NP

der Lage nach gegeben; in NP *wird der Punkt* N, *in* AB *aber der Punkt* E *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* PNB *und die Parallele fällt jenseit des Punktes* E *). *Es ist daher eine gerade Linie* HGP *zu ziehen, welche das gegebene Verhältniss* NP : EH *abschneide. Diese Linie* GP *ist aber der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 6, I, *woselbst keine Determination statt findet.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *(Nimm* m : p = FG : GN *und ziehe nach Buch* I *Fall* 6, I *die Linie* HGP, *welche das Verhältniss* NP : EH *gleich* p : n *abschneide.)* **) *Ich behaupte, dass die Linie* HP *der Aufgabe genüge. Denn weil* FG : GN, *oder* FK : NP = m : p *und* NP : EH = p : n, *so ist aus dem Gleichen* FK : EH = m : n; *mithin löst die Linie* HGP *das Problem.*

Cas. II. Fig. 42. *Analysis. Es werde nun nach der zweiten Art die Linie* GK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Durch den Punkt* N *ziehe der* CD *eine Linie parallel, wie* UNP. *Da die beiden Punkte* G, F *gegeben sind, so ist die Linie* GFN *der Lage nach gegeben; und da* AB *der Lage nach gegeben wird, so ist auch der Punkt* N *bekannt. Daher ist auch die Linie* UNP, *welche durch den gegebenen Punkt* N *der gegebenen* CD *parallel geht, der Lage nach gegeben. Ziehe auch durch den Punkt* G *die Linie* GO *der* CD *parallel, so ist der Punkt* O *bekannt.* ***) *Weil nun die Punkte* G, F, N *gegeben werden, so ist das Verhältniss* NG : GF *gegeben; also auch das Verhältniss* NP : FK. *Es ist aber das Verhältniss* FK : EH *ge-*

---

*) *d. h.* E *liegt zwischen* NP *und der mit* NP *parallelen* GO.

**) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

***) *Hier folgen noch die Worte:* Denique ducatur recta GK.

geben, folglich wird das Verhältniss NP : EH gegeben. Es werden also zwei gerade Linien UP, AB der Lage nach gegeben; in UP wird der Punkt N und in AB der Punkt E genommen; und die Parallele GO fällt jenseit des Punktes E. Es ist daher nach Fall 6, II des ersten Buches die Linie GP zu ziehen, welche das gegebene Verhältniss NP : EH abschneide; mithin ist die Linie GP der Lage nach gegeben.

Determination. Weil aber die mittlere Proportionale zwischen ON und NE grösser oder nicht grösser als NM seyn kann, so sey sie zuerst nicht grösser als NM. Verbinde GM, so behaupte ich, dass GM ein grösseres Verhältniss EM : MF abschneide als jede andere Linie, welche aus G nach CM gezogen werden kann. Verlängere die Linie GM bis zum Punkte J. Weil nun die mittlere Proportionale zwischen ON, NE nicht grösser als NM ist, so kann sie entweder gleich NM seyn oder kleiner. Ist sie gleich NM, so wird, — weil zwei gerade Linien UP, AB der Lage nach gegeben sind; in UP der Punkt N, in AB aber der Punkt E genommen wird; und die Parallele GO jenseit des Punktes E fällt — die nach J verlängerte Linie GM (nach Fall 6, II) ein kleineres Verhältniss NJ : EM abschneiden als jede andere so gezogene Linie. Wenn aber die mittlere Proportionale zwischen ON, NE kleiner ist als NM, so wird die Linie GM der das kleinste Verhältniss abschneidenden näher seyn als jede beliebige Linie GP. Daher ist NJ : EM $<$ NP : EH und perm. NJ : NP, das ist FM : FK $<$ EM : EH, und nochmals perm. FM : ME $<$ FK : EH, also invert. EM : MF $>$ EH : FK. Hieraus geht hervor, dass die Linie GM ein grösseres Verhältniss EM : MF abschneide als jede aus G nach MC gezogene Linie.

Wenn aber die mittlere Proportionale zwischen ON, NE grösser ist als NM, so sey sie die Linie NH.

Verbinde GH und verlängere sie; ziehe auch GM. Ich behaupte, dass die Linie GH ein Verhältniss $EH : FK$ abschneide, welches grösser ist als jedes andere, das durch Linien aus G nach MC abgeschnitten werden kann. Verlängere GM, GK nach J, P und zu beiden Seiten der GP ziehe die Linien GR, GW und verlängere sie nach S, Z. Es werden also zwei gerade Linien UP, AB der Lage nach gegeben; in UP wird der Punkt N und in AB der Punkt E genommen; die Linie GO, welche durch den gegebenen Punkt G der UP parallel gezogen wird, fällt jenseit des Punktes E, und NH ist die mittlere Proportionale zwischen ON und NE. Folglich wird (nach Fall 6, II) die Linie GHP das kleinste Verhältniss $NP : EH$ abschneiden. Wird also eine andere Linie, wie GS, gezogen, so ist das Verhältniss $NP : EH$ kleiner als $NS : EQ$ und perm. $PN : NS < EH : EQ$. Es ist aber $PN : NS = KF : FR$, folglich ist $KF : FR < EH : EQ$ und perm. $FK : EH < FR : EQ$, also invert. $EH : FK > EQ : FR$. Die Linie GK schneidet daher ein grösseres Verhältniss als jede Linie GR ab; nämlich das Verhältniss $EH : FK$, welches grösser ist als jedes Verhältniss, das durch eine beliebige Linie aus G nach MC abgeschnitten werden kann. Ich behaupte ausserdem, dass die Linie GM ein kleineres Verhältniss $EM : MF$ bestimme als jede andere aus G nach KM gehende Linie. Denn weil (nach Fall 6, II) die Linie GP das kleinste Verhältniss $NP : EH$ abschneidet und die der GP näheren geraden Linien immer kleinere Verhältnisse bestimmen als die von ihr entfernteren: so ist $NZ : EV < NJ : EM$ und perm. $NZ : NJ < EV : EM$. Nun ist $NZ : NJ = FW : FM$, also ist $FW : FM < EV : EM$ und perm. $FW : EV < FM : ME$, mithin invert. $EV : FW > EM : MF$. Die Linie GM schneidet also ein kleineres Verhältniss ab als GW; woraus hervorgeht, dass die Linie GM ein kleineres

Verhältniss EM : MF *bestimme als jede aus* G *nach* KM *gezogene gerade Linie.*

Synthesis. Die mittlere Proportionale zwischen ON, NE *sey zuerst nicht grösser als* NM. *Verbinde* GM, *so schneidet diese Linie ein grösseres Verhältniss* EM : MF *ab als jede aus* G *nach* MC *mögliche Linie. Das zur Construction gegebene Verhältniss ist aber entweder gleich* EM : MF, *oder grösser*, *oder kleiner. Ist es gleich demselben*, *so wird* GM *allein die Aufgabe lösen. Ist es grösser, so ist die Auflösung nicht möglich*, *weil das gegebene Verhältniss grösser als das grösste ist. Wenn aber das Verhältniss kleiner ist*, *so wird nur auf eine Weise construirt werden. Es sey also das gegebene Verhältniss* m : n < EM : MF. *Mache* p : n = NG : GF *und verlängere* GM *nach* J. *) *Weil also* NG : GF = p : n *und* NG : GF = NJ : FM, *so ist auch*

p : n = NJ : FM.

Es ist aber . . . . n : m > FM : ME,

folglich ist aus dem Gleichen p : m > NJ : EM. *Da nun (nach Fall* 6, II*) das Verhältniss* NJ : EM *entweder das kleinste ist, oder kleiner als jedes Verhältniss*, *das eine beliebige nach* JP *gehende Linie abschneiden kann*, *das Verhältniss* p : m *aber grösser als dasselbe ist: so lassen sich zwei gerade Linien zu beiden Seiten der* GM *ziehen*, *welche Verhältnisse gleich* p : m *abschneiden. Von diesen wird jedoch die eine das Problem nicht lösen, diejenige nämlich, welche die* MF *trifft; die andere aber*, *welche der* MC *begegnet*, *wird der Aufgabe genügen. Wird also die*

---

*) *Im Lat. folgt hier noch:* Jam constat, ex determinatione Casus secundi Loci sexti, quod ratio *NJ* ad *EM* vel minima est; vel propior erit rationi minimae, quam ratio quaevis alia a recta ipsi *PJ* occurrente abscissa. *Dieser Satz ist überflüssig*, *weil er bald nachher wiederkehrt.*

Linie GP *so gezogen, dass sie das Verhältniss* NP:EH = p:m *abschneidet: so behaupte ich, dass sie die Aufgabe löse oder dass* EH:FK = m:n *sey. Denn weil* NG:GF = p:n *und* NG:GF = NP:FK, *so ist auch*

NP : FK = p : n

Nun ist aber . . . . . EH : NP = m : p,
folglich ist aus dem Gleichen EH:FK = m:n, *mithin löst* GKP *die Aufgabe und zwar allein.*

Wenn aber die mittlere Proportionale zwischen ON, NE *grösser ist als* NM*: so sey sie gleich* NH. *Verbinde* GH, GM *und verlängere sie nach den Punkten* P, J*: so wird die Linie* GP *ein Verhältniss* EH:FK *abschneiden grösser als jedes Verhältniss durch eine andere Linie, welche aus* G *nach* EB, FC *gezogen werden kann; die Linie* GM *aber das Verhältniss* EM:MF, *welches kleiner ist als jedes andere durch eine Linie aus* G *nach* MK. *Das gegebene Verhältniss aber wird entweder gleich seyn dem Verhältnisse* EH:FK, *oder grösser, oder kleiner; (und im letztern Falle)* *) *wird es entweder grösser als* EM:MF, *oder eben so gross, oder kleiner seyn. Ist nun das Verhältniss gleich* EH:FK, *so genügt die Linie* GHP *allein der Aufgabe; und ist es grösser, so kann sie nicht gelöst werden. Ist es kleiner als* EH:FK, *aber grösser als* EM:MF, *so wird das Problem auf zweierlei Weise construirt werden, nämlich zu beiden Seiten der* GK. *(Ist es gleich dem Verhältnisse* EM:MF, *so leistet ausser der Linie* GM *noch eine zweite nach* KC *das Verlangte.)* *) *Wenn es aber kleiner als* EM:MF *ist, so wird nur auf eine Weise construirt werden, nämlich jenseit des Punktes* K. **)

Cas. III. Fig. 43. *Analysis. Es werde nun nach der dritten Art die Linie* GK *gezogen, welche*

---

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*
**) *d. h. durch eine Linie nach* KC.

das gegebene Verhältniss EH : FK *abschneide. Es ist aber das Verhältniss* FK : NP *gegeben, also auch das Verhältniss* NP : EH. *Folglich ist die Linie* GK *vermittelst Fall* 6, II *des ersten Buches der Lage nach gegeben.*

Determination. Weil die mittlere Proportionale zwischen ON, NE *kleiner oder nicht kleiner als* NM *seyn kann: so sey sie zuerst nicht kleiner als* NM. *Verbinde* GM *und verlängere sie nach* J, *so erhellet aus den früheren Beweisen, dass die Linie* GM *ein Verhältniss* EM : MF *abschneide, welches grösser ist als jedes Verhältniss, das beliebige aus* G *nach* EM *gezogene Linien abschneiden können.*

Wenn aber die mittlere Proportionallinie zwischen ON *und* NE *kleiner ist als* NM, *so sey sie* NH. *Verbinde* GM, GH *und verlängere sie nach* J, P*: so ist aus den vorhergehenden Gränzbestimmungen klar, dass die Linie* GH *unter allen aus* G *nach* EM *möglichen Linien das grösste Verhältniss* EH : FK, *die Linie* GM *aber ein kleineres Verhältniss* EM : MF *abschneide als jede andere Linie, welche aus* G *nach* HM *gezogen werden kann.*

Synthesis. Es werde die mittlere Proportionale zwischen ON *und* NE *genommen. Diese wird entweder kleiner seyn als* NM, *oder nicht kleiner. Sie sey nun zuerst nicht kleiner als* NM. *Verbinde* GM *und verlängere sie nach* J, *so wird die Linie* GMJ *ein Verhältniss* EM : MF *abschneiden, grösser als jedes Verhältniss durch irgend eine Linie aus* G *nach* EM. *Wenn also zur Construction ein Verhältniss gegeben wird, welches gleich* EM : MF *ist, so genügt offenbar* GM *allein der Aufgabe. Ist das gegebene Verhältniss grösser, so kann nicht construirt werden. Ist es aber kleiner, so erhellet aus den früheren Compositionen, dass die Auflösung nur auf eine Weise geschehen könne, nämlich durch eine Linie, welche* EM *trifft.*

Wenn aber die mittlere Proportionale zwischen ON, NE *kleiner ist als* NM, *wie* NH*: so verbinde* GM, GH *und verlängere sie nach* J *und* P. *Alsdann schneidet die Linie* GP *ein grösseres Verhältniss ab als alle beliebige Linien, welche aus dem Punkte* G *ausgehend die ganze* EM *treffen* *)*; die Linie* GM *dagegen bestimmt das Verhältniss* EM : MF, *welches kleiner ist als jedes Verhältniss, welches beliebige nach* HM *allein gehende Linien abschneiden. Es ist also klar, dass, wird zur Construction ein Verhältniss gleich* EH : FK *gegeben, die Linie* GH *die Aufgabe löse und dass keine Auflösung statt finden könne, wenn es grösser ist. Wenn aber das gegebene Verhältniss kleiner ist als* EH : FK, *jedoch grösser als* EM : MF, *so geht aus den eben vorgetragenen Determinationen hervor, dass das Problem auf zweierlei Weise gelöst werden könne, zu beiden Seiten der* GP, *durch Linien, welche* EH, HM *treffen. Ist aber das Verhältniss kleiner als* EM : MF, *so erhellet aus denselben Gränzbestimmungen, dass nur eine Linie, welche* EH *trifft, der Aufgabe genüge. Endlich wenn das gegebene Verhältniss gleich ist* EM : MF, *so folgt aus denselben Gründen, dass auf zweierlei Weise construirt werden könne und dass sowohl* GM *das Verlangte leiste als auch eine andere Linie, welche die* EH *trifft.*

Cas. IV. Fig. 44. *Analysis. Es werde nun nach der vierten Art die Linie* GKH *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Verlängere sie bis zum Punkte* P, *so ist wegen des gegebenen Verhältnisses* FK : NP *auch das Verhältniss* NP : EH *bekannt, also die Linie* GKH *der Lage nach gegeben, vermittelst Fall* 6. III, *woselbst keine Gränze statt findet. Die Construction aber ist einleuchtend.*

---

*) *Im Lat. folgt hier noch:* vel quam rectae quae soli rectae *HM* occurrunt.

Cas. V. Fig. 45. *Analysis. Es werde jetzt nach der fünften Art die Linie* GKH *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH *und somit die Linie* GKH *der Lage nach gegeben. Die Aufgabe kommt nämlich auf Fall* 6, IV *zurück.*

Determination. Es sey NH *die mittlere Proportionale zwischen* ON, NE. *Verbinde* GH; *ich behaupte, dass diese Linie* GKH *ein Verhältniss* FK : EH *abschneide grösser als jedes beliebige Verhältniss, welches irgend eine aus* G *nach* NA *gezogene Linie abschneiden kann. Denn ziehe eine andere Linie, wie* GQ. *Weil* NH *die mittlere Proportionale zwischen* ON, NE *ist, so ist* NP : EH > NS : EQ *und* perm. NP : NS > EH : EQ. *Es ist aber* NP : NS = FK : FR, *folglich ist* FK : FR > EH : EQ *und* perm. FK : EH > FR : EQ. *Die Linie* GKH *schneidet also ein grösseres Verhältniss* FK : EH *ab als jede andere aus* G *nach* NA *gehende Linie.*

Synthesis. Es sey NH *die mittlere Proportionale zwischen* ON, NE. *Verbinde* GH, *so wird die Linie* GH *das Verhältniss* FK : EH *abschneiden grösser als jedes andere Verhältniss, welches eine beliebige aus* G *nach* NA *gezogene Linie abschneiden kann. Wenn daher das zur Construction gegebene Verhältniss gleich ist* FK : EH, *so wird die Linie* GKH *allein das Problem lösen. Ist das gegebene Verhältniss grösser, so kann die Aufgabe nicht gelöst werden. Wenn es aber kleiner ist, so erhellet aus dem frühern Vortrage, dass sich zwei lösende Linien ziehen lassen, nämlich nach* AH, HN.

Fall 5.

Es falle nun die Linie *GN*, welche aus dem Punkte *G* durch den Punkt *F* gezogen ist, diesseit des Punk-

tes *E*, oder zwischen denselben und den Punkt *M*: so ist klar, dass durch den Punkt *G* Linien auf fünf Arten gezogen werden können.

Cas. I. II. Fig. 46. 47. *Analysis. Es werden nun zuerst nach der ersten und zweiten Art die Linien* GH *gezogen, welche die gegebenen Verhältnisse* FK : EH *abschneiden. Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so wird auch das Verhältniss* NP : EH *gegeben seyn. Es werden also zwei gerade Linien* NP, MH *der Lage nach gegeben; in jener wird der Punkt* N, *in dieser aber der Punkt* E *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* PNM. *Es sind daher nach der ersten und zweiten Art des vierten Falles gerade Linien* GH *zu ziehen, welche die gegebenen Verhältnisse* NP : EH *abschneiden; mithin sind die Linien* GH *der Lage nach gegeben durch die in jenen Arten gelehrten Constructionen, welche keine Gränzen haben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n *und es werde* m : p = FG : GN *genommen. Es werden nun zwei gerade Linien* NP, EM *der Lage nach gegeben; in* NP *wird der Punkt* N, *in der andern* MH *aber der Punkt* E *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* MNP. *Zieht man also nach der ersten und zweiten Art des vierten Falles die geraden Linien* GH, *welche die Verhältnisse* NP : EH = p : n *abschneiden, so ist offenbar, dass sie der Aufgabe genügen werden.* *)

Cas. III. Fig. 48. *Analysis. Es werde nach der dritten Art die Linie* GH *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Verlängere*

*) *Im Lat. lautet dieser Satz:* Rectae igitur *GH*, ductae juxta Casus primum et secundum Loci quarti, auferent rationes *NP* ad *EH* aequales rationi *p* ad *n*; unde patet rectam *GH* satisfacere problemati.

sie bis zum Punkte P. *Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH *und somit die Linie* GHP *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 4, III.

Determination. *Verbinde* GM *und verlängere sie nach* J: *ich behaupte, dass die Linie* GJ *ein grösseres Verhältniss* FM : ME *abschneide als jede beliebige aus* G *nach* FM *gehende Linie. Denn ziehe eine andere Linie, wie* GP. *Da die dem Punkte* N *näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren: so ist* NP : EH < NJ : EM, *mithin* perm. *(und* invert.*)* *) NJ : NP > EM : EH. *Es ist aber* NJ : NP = FM : FK, *also* FM : FK > EM : EH *und* perm. FM : ME > FK : EH. *Folglich schneidet die Linie* GJ *ein Verhältniss* FM : ME *ab grösser als jedes Verhältniss, das durch eine beliebige aus* G *nach* MN *gezogene Linie abgeschnitten werden kann.*

Synthesis. *Verbinde* GM *und verlängere sie nach* J: *so bestimmt diese Linie* GJ *ein grösseres Verhältniss* FM : ME *als jede andere aus* G *nach* MN *mögliche Linie. Wenn also das zur Construction gegebene Verhältniss gleich* FM : ME *ist, so wird* GJ *allein die Aufgabe lösen. Ist das gegebene Verhältniss grösser, so ist die Auflösung nicht möglich. Wenn es aber kleiner ist, so erhellet aus den vorhergehenden Determinationen, dass das Problem nur auf eine Weise gelöst werden könne, nämlich durch eine Linie, welche* NM *trifft.*

Cas. IV. Fig. 49. *Analysis.* *Es werde nach der vierten Art die Linie* GK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide; verlängere*

---

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat. Der Schluss* invertendo *konnte aber vermieden werden durch Umstellung der vorhergehenden Verhältnisse.*

sie bis zum Punkte P. *Weil das Verhältniss* FK : NP *bekannt ist, so wird auch das Verhältniss* NP : EH *und somit die Linie* GP *der Lage nach gegeben seyn, indem die Aufgabe wie die vorhergehende auf Fall* 4, III *zurückkommt.*

Determination. Verbinde GM *und verlängere sie nach* J: *ich behaupte, dass die Linie* GJ *ein Verhältniss* FM : ME *abschneide kleiner als jedes andere, welches durch irgend eine aus* G *nach* MC *gehende Linie abgeschnitten werden kann. Denn ziehe eine andere Linie, wie* GP. *Weil die dem Punkte* N *näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse bestimmen als die von ihm entfernteren, so ist* NJ : EM < NP : EH *und* perm. NJ : NP < EM : EH. *Es ist aber* NJ : NP = FM : FK; *folglich ist* FM : FK < EM : EH *und* perm. FM : ME < FK : EH. *Daher schneidet* GM *ein kleineres Verhältniss* FM : ME *ab als jede beliebige Linie, welche aus* G *nach* MC *gezogen werden kann.*

Synthesis. Verbinde GM *und verlängere sie nach* J: *so wird* GJ *das Verhältniss* FM : ME *abschneiden, welches kleiner ist als jedes andere durch eine Linie aus* G *nach* MC. *Ist nun das zur Construction gegebene Verhältniss gleich* FM : ME, *so genügt* GJ *allein der Aufgabe. Ist es kleiner, so ist die Auflösung nicht möglich. Ist es aber grösser, so ist im Vorhergehenden gezeigt worden, dass nur eine Linie, welche* MC *trifft, das Verlangte leiste.*

Cas. V. Fig. 50. *Analysis. Es werde nach der fünften Art die Linie* HK *gezogen, welche von* EH, FK *das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide; verlängere sie bis zum Punkte* P. *Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH *und somit die Linie* PH *der Lage nach gegeben vermittelst der Auflösung in Fall* 4, IV, *welche keine Gränzen hat. Die Construction aber ist einleuchtend.*

Fall 6.

Es gehe jetzt die Linie, welche durch die Punkte *G*, *F* gezogen ist, durch den in der andern Linie genommenen Punkt *E*, wie *GFE*: so ist klar, dass aus dem Punkte *G* Linien auf vier Arten gezogen werden können.

Cas. I. Fig. 51. *Analysis. Es werde nun die Linie* GP *nach der ersten Art gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide* *); *ziehe* EP *parallel mit* CD. *Weil das Verhältniss* FK : EP *gegeben ist, so wird auch gegeben seyn das Verhältniss* EP : EH; *folglich ist die Linie* PH *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 3, I *im ersten Buche*.

Determination. Das gegebene Verhältniss muss aber kleiner seyn als FL : EO. *Ziehe nämlich eine Linie* GO *der* MFL *parallel, und verlängere die Linien* GL, EP *bis* N. *Weil nun* NE : EP > NP : PE *und* NE : EP = LF : FK, *so wie* NP : PE = GN : EH, *und die Linie* GN = EO *ist, so ist* LF : FK > EO : EH *und* perm. FL : EO > FK : EH. *Es muss also das zur Construction gegebene Verhältniss kleiner als* FL : EO *seyn.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n *kleiner als* FL : EO. *Nimm* m : p = FG : GE. *Da nun* FG : GE = FL : LM, *so ist auch* FL : LM = m : p. *Es ist aber* LM = GO, *daher ist* FL : GO = m : p *und* invert.

p : m = GO : FL

Nun ist . . . . . . m : n < FL : EO,

folglich ist aus dem Gleichen p : n < GO : OE. *Macht man also* GO : OH = p : n, *so ist* OH > OE.

*) *Im Lat. folgt hier noch:* ac producatur ea ad *H*; *dagegen fehlen die Worte: ziehe* EP *parallel mit* CD.

Verbinde GH, *so behaupte ich, dass die Linie* GH *die Aufgabe löse. Denn es ist* m : p = FG : GE *und* FG : GE = FK : EP, *mithin*

FK : EP = m : p.

Nun ist GO : OH, *das ist* . . PE : EH = p : n, *folglich ist aus dem Gleichen* FK : EH = m : n. *Die Linie* GH *löst also die Aufgabe.*

Cas. II. Fig. 52. *Analysis. Es werde nun nach der zweiten Art die Linie* GH *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Verlängere sie bis zum Punkte* P. *Weil das Verhältniss* FK : EP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* EP : EH, *mithin die Linie* GP *der Lage nach gegeben; die Aufgabe kommt nämlich auf Fall* 3, II *zurück.*

Determination. Verbinde GM *und verlängere sie nach* J: *ich behaupte, dass die Linie* GM *das Verhältniss* FM : ME *abschneide grösser als jedes Verhältniss, welches beliebige aus* G *nach* EM *gezogene Linien abschneiden. Denn zieht man eine Linie* GP, *so ist, weil die dem Punkte* E *näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren, offenbar das Verhältniss* JE : EM *grösser als* PE : EH *und* perm. JE : EP *grösser als* ME : EH. *Nun ist* JE : EP = MF : FK, *mithin ist* MF : FK *grösser als* ME : EH *und* perm. FM : ME *grösser als* FK : EH. *Die Linie* GM *schneidet also ein grösseres Verhältniss* FM : ME *ab als jede andere aus* G *nach* EM *gezogene Linie.*

Synthesis. Verbinde GM *und verlängere sie nach* J. *Diese Linie* GM *wird ein † grösseres Verhältniss* FM : ME *bestimmen als jede beliebige aus* G *nach* EM *gezogene Linie. Wenn also das gegebene Verhältniss gleich ist dem Verhältnisse* FM : ME, *so löst die Linie* GM *allein die Aufgabe. Ist das gegebene Verhältniss grösser, so kann nicht construirt werden. Ist es aber kleiner, so lässt sich offenbar*

nach Fall 3, II *aus* G *nach* EM *eine Linie ziehen, welche das Verlangte leistet.*

Cas. III. Fig. 53. *Analysis. Es werde nach der dritten Art die Linie* GK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide; verlängere sie nach* P. *Weil das Verhältniss* FK : EP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* HE : EP *) *und somit die Linie* GP *der Lage nach gegeben. Die Aufgabe kommt nämlich wie die vorige auf Fall* 3, II *zurück.*

Determination. Verbinde GM *und verlängere sie nach* J. *Weil die dem Punkte* E *näheren geraden Linien immer* †) *kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren: so wird (nach den vorhin bewiesenen Gränzbestimmungen) die Linie* GM *ein kleineres Verhältniss* FM : ME *abschneiden als jede andere Linie, welche aus* G *nach* MH *gezogen werden kann.*

Synthesis. Verbinde GM *und verlängere sie nach* J. *Diese Linie* GM *wird ein kleineres Verhältniss* FM : ME *abschneiden als jede andere aus* G *nach* MH *gezogene Linie. Wenn also zur Construction ein Verhältniss gegeben wird, welches gleich ist* FM : ME, *so genügt* GM *allein der Aufgabe. Ist es kleiner, so wird nicht construirt werden. Wenn es aber* †) *grösser ist, so erhellet aus den vorhergehenden Begränzungen, dass sich nach* MH *eine lösende Linie ziehen lasse.*

Cas. IV. Fig. 54. *Analysis. Es werde nach der vierten Art die Linie* HGK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Verlängere sie nach* P. *Weil das Verhältniss* FK : EP *gegeben ist, so ist es auch das Verhältniss* EP : EH. *Es*

---

*) *Diess Verhältniss ist umzukehren.*

†) In Cas. II et III ubique fere contrarium habet *MS.* Codex, manifesta menda. Halley.

werden also zwei gerade Linien EH, EP *der Lage nach gegeben; in jeder derselben wird der Punkt* E *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* HEP. *Es ist daher nach Fall* 3, III *die Linie* HP *zu ziehen, welche das gegebene Verhältniss* EP : EH *abschneide. Folglich ist die Linie* HP *der Lage nach gegeben (vermittelst der in jener Stelle vorgetragenen Construction) und hat keine Gränzen.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n *und es werde* m : p = FG : GE *gemacht. Es sind also zwei gerade Linien* EH, EP, *welche einander in* E *schneiden, der Lage nach gegeben, und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* HEP. *Es werde also (nach Fall* 3, III*) die Linie* HP *gezogen, welche das Verhältniss* EP : EH *gleich* p : n *abschneide: so ist klar, dass die Linie* HP *der Aufgabe genüge.*

Fall 7.

Es liege nun der gegebene Punkt *G* im W. *DMA.* Man ziehe durch den Punkt *G* mit den gegebenen Linien *AM*, *MD* zwei Parallelen wie *EG*, *GF*, welche denselben in den Punkten *E*, *F* begegnen. Alsdann ist klar, dass sich aus *G* Linien auf drei Arten ziehen lassen.

Cas. I. Fig. 55. *Analysis. Es werde nun zuerst eine Linie* HK *nach der ersten Art gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Weil* FK : EH = ▭ FK . EH : EH², *so ist das Verhältniss* ▭ FK . EH : EH² *gegeben. Es ist aber* ▭ FK . EH *gegeben, weil es gleich* ▭ FGE *ist* *); *folglich ist die Linie* EH *bekannt. Da nun der Punkt* E *gegeben ist, so ist es auch der Punkt* H; *mithin ist wegen des gegebenen Punktes* G *die Linie* HK *der Lage nach gegeben.*

---

*) *Aus den gleichwinkligen* △△ KFG, GEH *nämlich folgt* KF : FG = GE : EH, *also* ▭ FK . EH = ▭ FGE *(oder* = ▭ EMF*).*

Synthesis. *Es sey* m:n *das gegebene Verhältniss. Mache* ▭ FGE : EH² = m : n, *verbinde* GH *und verlängere sie nach* K; *ich behaupte, dass die Linie* HK *dem Probleme genüge. Denn weil* ▭ FGE : EH² = m : n *und* ▭ FK . EH = ▭ FGE *ist, so ist* ▭ FK . EH : EH² = m : n, *also auch* FK : EH = m : n. *Die Linie* HK *löst also die Aufgabe.*

Cas. II. Fig. 56. *Analysis. Es werde nach der zweiten Art die Linie* GK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Weil das Verhältniss* EH : FK *gegeben wird, so ist das Verhältniss* ▭ EH . FK : FK² *gegeben. Es ist aber* ▭ EH . FK = ▭ EMF, *mithin ist das Verhältniss* ▭ EMF : FK² *bekannt. Nun wird* ▭ EMF *gegeben wegen seiner bekannten Seiten; es ist also* FK² *und daher die Linie* FK *der Grösse und Lage nach gegeben. Wegen des gegebenen Punktes* F *ist also der Punkt* K *und somit die Linie* GK *der Lage nach gegeben.*

Determination. Weil aber ME > EH *und* MF < FK, *so ist* ME : EH > MF : FK *und* perm. EM : MF > EH : FK. *Es ist aber* EH : FK *das gegebene Verhältniss; daher muss das gegebene Verhältniss kleiner als* EM : MF *seyn.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss m : n *sey kleiner als* EM : MF. *Weil also* EM : MF > m : n, *so wird* ▭ EMF : MF² > m : n *seyn. Es sey daher* ▭ EMF : FK² = m : n, *so ist* FK > MF. *Ich behaupte nun, dass die Linie* GK *die Aufgabe löse oder dass* EH : FK = m : n *sey. Denn es ist* m : n = ▭ EMF : FK². *Es ist aber* ▭ EMF = ▭ EH . FK. *Folglich ist* m : n = ▭ EH . FK : FK² *das ist* = EH : FK. *Die Linie* GK *löst also die Aufgabe; ich behaupte auch, sie allein. Denn wenn eine andere Linie wie* GR *gezogen wird, so ist klar, dass jene dem Probleme genüge, diese aber nicht.*

Cas. III. Fig. 57. *Analysis. Es werde nun die Linie* GKH *nach der dritten Art gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Weil das Verhältniss* EH : FK *gegeben ist, so wird auch das Verhältniss* ▭ EH . FK : FK² *gegeben seyn. Nun ist* ▭ EH . FK = ▭ EMF, *mithin ist das Verhältniss* ▭ EMF : FK² *bekannt. Das* ▭ EMF *ist aber gegeben wegen der bekannten Linien* EM, MF; *folglich ist* FK² *gegeben und die Linie* FK *der Grösse und Lage nach. Wegen des gegebenen Punktes* F *ist also der Punkt* K *bekannt, folglich die Linie* GKH *der Lage nach gegeben.*

Determination. Weil aber EH > EM *und* KF < FM, *so ist* EH : EM > KF : FM *und* perm. EH : FK > EM : MF. *Es ist aber* EH : FK *das gegebene Verhältniss. Folglich muss das zur Construction gegebene Verhältniss grösser als* EM : MF *seyn.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss m : n *sey grösser als das Verhältniss* EM : MF *oder als das Verhältniss des* ▭ EMF *zum Quadrate von* FM. *Mache also* ▭ EMF : FK² = m : n, *so wird* FK < FM *seyn. Verbinde* GK *und verlängere sie nach* H. *Ich behaupte, dass die Linie* GH *die Aufgabe löse oder dass* EH : FK = m : n *sey. Denn weil* ▭ EMF : FK² = m : n *und* ▭ EMF = ▭ EH . FK, *so ist* ▭ EH . FK : FK² *das ist* EH : FK = m : n. *Die Linie* GH *löst also die Aufgabe und zwar allein. Denn wird eine andere Linie gezogen, so genügt zwar jene der Aufgabe, nicht aber diese.*

Fall 8.

Es gehe nun die durch *G* mit *FM* parallel gezogene Linie durch den Punkt *E*; die Linie aber, welche der andern *MA* parallel gezogen ist, falle diesseit des Punktes *F*, wie *GL*. Dann können aus *G* Linien auf vier Arten gezogen werden.

Cas. I. Fig. 58. *Analysis.* *Es werde aber zuerst die Linie* HGK *nach der ersten Art gezogen, welche das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Weil* EH : FK = ▭ EH . KL : ▭ FKL, *so ist das Verhältniss* ▭ EH . KL : ▭ FKL *gegeben. Es ist aber* ▭ EH . KL = ▭ GEM *oder* GE . GL; *folglich ist das* ▭ FKL *gegeben, welches an der gegebenen* LF *so zu entwerfen ist, dass der Überschuss ein Quadrat sey. Daher ist die Linie* FK *gegeben so wie der Punkt* K. *Wegen des gegebenen Punktes* G *ist also die Linie* KGH *der Lage nach gegeben.*

Synthesis. *Das gegebene Verhältniss sey* m : n. *Nimm* ▭ EGL : ▭ Z = m : n *und entwirf an* LF *ein Rechteck gleich* ▭ Z, *dessen Überschuss ein Quadrat sey. Es sey diess das* ▭ LKF. *Verbinde* KG *und verlängere sie nach* H; *ich behaupte, dass die Linie* HK *die Aufgabe löse. Denn weil* m : n = ▭ EGL : ▭ Z *und* ▭ Z = ▭ FKL *so wie* ▭ EGL = ▭ EH . KL, *so ist* ▭ EH . KL : ▭ FKL, *das ist* EH : FK = m : n. *Folglich löst die Linie* HK *die Aufgabe.*

Cas. II. Fig. 59. *Analysis.* *Es werde jetzt die Linie* HK *nach der zweiten Art gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Wegen des gegebenen Verhältnisses* EH : FK *ist auch das Verhältniss* ▭ EH . KL : ▭ FKL *gegeben. Nun ist aber* ▭ EH . KL *gegeben, weil es gleich* ▭ EGL *ist; folglich ist* ▭ FKL *gegeben. Entwirft man also jenes Rechteck an* LF *so dass die Ergänzung ein Quadrat sey: so erhält man die Linie* LK. *Wegen der gegebenen Punkte* K, G *ist also die Linie* KH *der Lage nach gegeben.*

Determination. Weil aber zur Construction erforderlich ist, dass das Verhältniss des ▭ EGL *zu einem andern gleich dem gegebenen gemacht und an der Linie* LF *ein dem letztern gleiches Rechteck entworfen werde, dessen Ergänzung ein Quadrat sey:*

so wird diese Entwerfung nicht immer möglich seyn, wenn nämlich jenes Rechteck grösser ist als das Quadrat der halben LF. *Es wird sich daher auch nicht jedes beliebige Verhältniss von den gegebenen Linien abschneiden lassen* *). *Das Gränzverhältniss aber wird so gefunden.*

Halbire LF *in* K, *verbinde* KG *und verlängere sie nach* H. *Ich behaupte, dass die Linie* HK *ein kleineres Verhältniss* EH : FK *abschneide als jede andere Linie, welche aus* G *nach* LF *gezogen werden kann. Denn ziehe eine andere Linie, wie* QR. *Weil* $LK = KF$, *so ist* $\square LKF > \square LRF$. *Es ist aber* $\square EH . LK = \square EQ . LR$, *weil jedes derselben gleich* $\square EGL$ *ist. Daher ist* $\square EH . KL : \square LKF < \square EQ . LR : \square LRF$. *Nun ist*

$$\square EH . LK : \square LKF = EH : FK$$

und $$\square EQ . LR : \square LRF = EQ : FR,$$

folglich ist $EH : FK < EQ : FR$. *Die Linie* HK *schneidet also ein kleineres Verhältniss* EH : FK *ab als jede andere aus* G *nach* LF *gezogene Linie.*

Synthesis. Halbire LF *in* K, *verbinde* KG *und verlängere sie nach* H: *so schneidet die Linie* HK *das Verhältniss* EH : FK *ab kleiner als jedes andere Verhältniss, welches durch irgend eine Linie aus* G *nach* LF *abgeschnitten werden kann. Ist nun das zur Construction gegebene Verhältniss gleich* EH : FK, *so löst* HK *allein die Aufgabe. Ist es klei-*

---

*) *Das Lat. lautet so:* Quoniam autem requiritur, ut fiat, in ratione ad componendum proposita, rectangulum *EG* in *GL* ad rectangulum aliud; et ut applicetur ad rectam *LF* rectangulum aequale huic rectangulo deficiens quadrato: fieri non potest ut applicetur ad quamvis rectam datam rectangulum datum deficiens quadrato. Impossibile est igitur producere rectam lineam ad punctum *H*, quae auferat a quibuslibet duabus rectis segmenta quae sint inter se in ratione data.

ner, so kann nicht construirt werden. Ist aber das gegebene Verhältniss grösser als EH : FK *wie* m : n, *so nimm* ▭ EGL (= ▭ EH . LK) : ▭ Z = m : n. *Weil nun* m : n > EH : FK, *so ist* ▭ EH . LK : ▭ Z > EH : FK. *Es ist aber* EH : FK = ▭ EH . KL : ▭ FKL, *folglich*

▭ EH . LK : ▭ Z > ▭ EH . KL : ▭ FKL.

Daher ist ▭ Z < ▭ FKL. *Es lässt sich also an* LF *ein dem* ▭ Z *gleiches Rechteck entwerfen, und zwar auf zweierlei Weise. Die Entwerfungspunkte seyen* R *und* W; *verbinde* GR, GW *und verlängere sie nach* Q *und* V: *ich behaupte, dass beide Linien* QR, VW *die Aufgabe lösen. Denn weil* ▭ EGL : ▭ Z = m : n *und* ▭ EGL = ▭ EV . LW *so wie* ▭ Z = ▭ LWF, *so ist* ▭ EV . LW : ▭ LWF *das ist* EV : FW = m : n. *Die Linie* VW *löst also die Aufgabe. Und eben so wird bewiesen, dass die Linie* QR *dasselbe leiste. Es ist also klar, dass das Problem auf zweierlei Weise gelöst werden könne.*

Cas. III. Fig. 60. *Analysis. Es werde nach der dritten Art die Linie* GK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Weil das Verhältniss* ▭ EH . KL : ▭ FKL *und das* ▭ EH . KL *gegeben ist: so wird auch das Rechteck* FKL *gegeben seyn, welches an der* FL *so zu entwerfen ist, dass der Überschuss ein Quadrat sey. Es ist daher die Linie* KL *und der Punkt* K *gegeben.*

Determination. Zur Construction ist aber nöthig, dass das gegebene Verhältniss kleiner als EM : MF *sey. Denn es ist* ME > EH *und* MF < FK; *daher ist* EM : EH > MF : FK *und* perm. EM : MF > EH : FK. *Es ist aber* EH : FK *das gegebene Verhältniss; folglich ist zur Construction erforderlich, dass das gegebene Verhältniss kleiner sey als* EM : MF.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss m : n *sey kleiner als* EM : MF. *Nimm* ▭ EGL (= ▭ EML) : ▭ Z = m : n. *Da nun* m : n < EM : MF, *so ist* ▭ EML : ▭ Z

$< \mathrm{EM} : \mathrm{MF}$. *Es ist aber* $\mathrm{EM} : \mathrm{MF} = \square \mathrm{EML} : \square \mathrm{FML}$, *folglich ist* $\square \mathrm{Z} > \square \mathrm{FML}$. *Wird also an* FL *ein dem* $\square$ Z *gleiches Rechteck entworfen, dessen Überschuss ein Quadrat ist, so liegt der Punkt* K *jenseit des Punktes* M. *Es sey daher* $\square \mathrm{FKL} = \square \mathrm{Z}$, *verbinde* GK: *ich behaupte, dass die Linie* GK *die Aufgabe löse. Denn weil* $\mathrm{m} : \mathrm{n} = \square \mathrm{EGL} : \square \mathrm{Z}$ *und* $\square \mathrm{Z} = \square \mathrm{FKL}$, *so ist* $\mathrm{m} : \mathrm{n} = \square \mathrm{EGL} : \square \mathrm{FKL}$. *Nun ist* $\square \mathrm{EGL} = \square \mathrm{EH} . \mathrm{KL}$, *daher ist* $\mathrm{m} : \mathrm{n} = \square \mathrm{EH} . \mathrm{KL} : \square \mathrm{FKL}$. *Es ist aber* $\square \mathrm{EH} . \mathrm{KL} : \square \mathrm{FKL} = \mathrm{EH} : \mathrm{FK}$; *folglich ist* $\mathrm{EH} : \mathrm{FK} = \mathrm{m} : \mathrm{n}$ *und die Linie* GK *löst die Aufgabe.*

Cas. IV. Fig. 61. *Analysis. Es werde nach der vierten Art die Linie* GH *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* $\mathrm{EH} : \mathrm{FK}$ *abschneide. Weil das Verhältniss* $\square \mathrm{EH} . \mathrm{KL} : \square \mathrm{FKL}$ *gegeben und* $\square \mathrm{EH} . \mathrm{KL} = \square \mathrm{EGL}$ *ist: so ist auch* $\square$ FKL *gegeben, an der bekannten* FL *so zu entwerfen, dass der Überschuss ein Quadrat sey. Daher ist die Linie* KL, *also wegen des gegebenen Punktes* G *die Linie* GK *der Lage nach gegeben.*

Determination. Das zur Construction gegebene Verhältniss muss aber grösser als $\mathrm{EM} : \mathrm{MF}$ *seyn. Denn es ist* $\mathrm{EH} > \mathrm{EM}$ *und* $\mathrm{FK} < \mathrm{FM}$; *daher ist* $\mathrm{EH} : \mathrm{EM} > \mathrm{FK} : \mathrm{FM}$ *und* perm. $\mathrm{EH} : \mathrm{FK} > \mathrm{EM} : \mathrm{MF}$. *Es ist aber* $\mathrm{EH} : \mathrm{FK}$ *das gegebene Verhältniss; folglich muss dasselbe grösser als* $\mathrm{EM} : \mathrm{MF}$ *seyn.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $\mathrm{m} : \mathrm{n}$ *grösser als* $\mathrm{EM} : \mathrm{MF}$. *Nimm* $\square \mathrm{EGL} (= \square \mathrm{EML}) : \square \mathrm{Z} = \mathrm{m} : \mathrm{n}$. *Weil nun* m *zu* $\mathrm{n} > \mathrm{EM} : \mathrm{MF}$ *und*

$$\mathrm{m} : \mathrm{n} = \square \mathrm{EML} : \square \mathrm{Z},$$
$$\mathrm{EM} : \mathrm{MF} = \square \mathrm{EML} : \square \mathrm{FML},$$

so ist $\square \mathrm{EML} : \square \mathrm{Z} > \square \mathrm{EML} : \square \mathrm{FML}$, *mithin* $\square \mathrm{Z} < \square \mathrm{FML}$. *Wird also an* FL *ein dem* $\square$ Z *gleiches Rechteck entworfen, dessen Überschuss ein Quadrat ist, so wird der Entwerfungspunkt* K *diesseit des*

Punktes M *fallen. Es sey nun* ▭ FKL = ▭ Z, *verbinde* GK *und verlängere sie nach* H: *ich behaupte, dass die Linie* GH *die Aufgabe löse. Denn weil* ▭ EGL *das ist* ▭ EH . KL : ▭ FKL = m : n *und* ▭ EH . KL : ▭ FKL = EH : FK, *so ist* EH : FK = m : n.

Fall 9.

Es falle nun die andere der beiden Parallelen jenseit *) des Punktes *F*, wie die Linie *GL*: so ist klar, dass es vier Arten giebt, das ist dass sich aus dem Punkte *G* Linien auf vier Arten ziehen lassen.

Cas. I. Fig. 62. *Analysis. Es werde nach der ersten Art die Linie* HK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Weil das* ▭ EH . KL *gegeben ist, so ist auch das* ▭ FKL *gegeben, an der bekannten* FL *so zu entwerfen, dass der Überschuss ein Quadrat sey. Daher ist die Linie* KL *und der Punkt* K *bekannt, folglich die Linie* HGK *der Lage nach gegeben. Die Construction des Problems aber erhellet aus dem Vorhergehenden.*

Cas. II. Fig. 63. *Analysis. Es werde nun nach der zweiten Art die Linie* GK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Weil das Verhältniss* ▭ EH . KL : ▭ FKL *und das* ▭ EH . KL *selbst gegeben ist: so ist auch das* ▭ FKL *gegeben an der bekannten Linie* FL *so zu entwerfen, dass der Überschuss ein Quadrat sey. Folglich ist der Punkt* K *und, weil der Punkt* G *gegeben wird, die Linie* GK *der Lage nach gegeben.*

Determination. Das zur Construction gegebene Verhältniss aber muss kleiner als EM : MF *seyn. Denn weil* ME > EH *und* MF < FK: *so wird das Verhältniss* EM : EH *grösser seyn als*

*) extra, *besser* ultra.

das Verhältniss MF : FK; *mithin ist* perm. EH : FK $<$ EM : MF.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss m : n *sey kleiner als* EM : MF. *Nimm* ▭ EGL *oder* ▭ EML : ▭ Z = m : n. *Weil nun* m : n $<$ EM : MF *und* EM : MF = ▭ EML : ▭ FML, *so ist*

▭ EML : ▭ Z $<$ ▭ EML : ▭ FML;

folglich ist das Rechteck Z *grösser als das Rechteck* FML. *Man entwerfe also an der Linie* FL *ein dem* ▭ Z *gleiches Rechteck, dessen Überschuss ein Quadrat sey; es sey das* ▭ FKL: *so wird der Punkt* K *jenseit des Punktes* M *fallen, und es ist klar, dass die Linie* GK *der Aufgabe genüge.*

Cas. III. Fig. 64. *Analysis. Es werde nach der dritten Art die Linie* GH *gezogen, abschneidend das Verhältniss* EH : FK, *welches gegeben wird. Weil das Verhältniss des Rechtecks* FKL *zum Rechtecke* EH . KL *) *und das* ▭ EH . KL *selbst gegeben ist: so wird auch das* ▭ FKL *gegeben, an der* FL *so zu entwerfen, dass der Überschuss ein Quadrat sey. Daher ist der Punkt* K *und wegen des gegebenen Punktes* G *die Linie* GH *der Lage nach gegeben.*

Determination. Es muss aber das zur Construction gegebene Verhältniss grösser seyn als EM : MF. *Denn weil* HE : EM $>$ KF : FM, *so ist* perm. EH : FK $>$ EM : MF. *Es ist aber* EH : FK *das gegebene Verhältniss, mithin ist klar, dass das gegebene Verhältniss grösser seyn müsse als* EM : MF. *Aus dem Vorigen aber erhellet, wie die Construction gemacht werden könne.*

Cas. IV. Fig. 65. *Analysis. Es werde nun nach der vierten Art die Linie* GH *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Weil*

---

*) *Diess Verhältniss muss umgekehrt werden.*

das Verhältniss ▭ EH . KL : ▭ FKL *und das* ▭ EH . KL *gegeben ist: so ist auch* ▭ FKL *gegeben. Entwirft man also dieses Rechteck an* FL *so, dass die Ergänzung ein Quadrat ist, so erhält man den Punkt* K; *und weil der Punkt* G *gegeben wird, so ist die Linie* HKG *der Lage nach gegeben.*

Determination. Halbire FL *im Punkte* K, *verbinde* GK *und verlängere sie nach* H. *Ich behaupte, dass die Linie* GH *ein kleineres Verhältniss* EH : FK *abschneide als jede andere Linie, welche aus* G *nach* FL *gezogen werden kann. Denn ziehe eine andere Linie, wie* GRQ. *Weil* FK = KL, *so ist* ▭ FKL $>$ ▭ FRL. *Es ist aber* ▭ EH . KL = ▭ EQ . RL *(weil jedes derselben gleich* ▭ EGL *ist). Folglich ist*

▭ EH . KL : ▭ FKL $<$ ▭ EQ . RL : ▭ FRL.

Nun ist . . ▭ EH . KL : ▭ FKL = EH : FK
und ▭ EQ . RL : ▭ FRL = EQ : FR,

folglich ist EH : FK $<$ EQ : FR. *Mithin schneidet die Linie* GH *ein kleineres Verhältniss* EH : FK *ab als jede andere Linie, welche aus* G *nach* FL *gezogen werden kann, und es findet demnach eine Gränze statt. Aus dem eben Vorgetragenen aber erhellet, dass (wenn das gegebene Verhältniss grösser als* EH : FK *ist)* *) *die Construction auf zweierlei Weise, zu beiden Seiten der* GH, *geschehen könne, nämlich durch Linien, welche* KF *und* KL *treffen.*

Fall 10.

Es fallen nun die beiden Linien, welche durch den Punkt *G* mit *HM*, *MK* parallel gezogen werden, jenseit der gegebenen Punkte *F* und *E*, wie die Linien *GL*, *GO*. Dann ist klar, dass aus dem Punkte *G* Linien auf fünf verschiedene Arten gezogen werden können.

---

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

Cas. I. Fig. 66. *Analysis.* *Es werde aber zuerst nach der ersten Art die Linie* HK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Verbinde* GF, *verlängere sie nach* N *und ziehe durch den Punkt* N *der* MK *die Linie* NP *parallel; verlängere auch die Linie* HGK *bis zum Punkte* P *in der Linie* NP, *welche der Lage nach gegeben ist. Weil nun das Verhältniss* FK : EH, *so wie* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH *gegeben. Es werden also zwei gerade Linien* HN, NP *der Lage nach gegeben; in* HN *wird der Punkt* E, *in* NP *aber der Punkt* N *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* HNP *und die Parallele* GO *fällt jenseit des Punktes* E. *Es ist also nach der ersten Art des sechsten Falles eine gerade Linie zu ziehen, welche das gegebene Verhältniss* NP : EH *abschneide. Daher ist die Linie* HP *der Lage nach gegeben vermittelst der in jener Stelle gelehrten Construction, woselbst auch keine Gränze statt findet.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Mache* m : p = FG : GN *und ziehe nach Fall* 6, I *die Linie* HP, *welche das Verhältniss* NP : EH *gleich* p : n *abschneide: so ist klar, dass die Linie* HP *die Aufgabe löse.*

Cas. II. Fig. 67. *Analysis. Es werde nun die Linie* GK *gezogen nach der zweiten Art, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Verlängere* GF *nach* N *und durch den Punkt* N *ziehe der* MK *eine Linie parallel, welche die* GK *im Punkte* P *treffe. Weil nun die Verhältnisse* FK : EH *und* FK : NP *gegeben sind, so ist auch das Verhältniss* NP : EH *und desshalb die Linie* GP *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 6, II, *wo eine Determination statt findet.*

Determination. Nimm NH *gleich der mittlern Proportionale zwischen* ON, NE; *verbinde* GH

und verlängere sie nach P. *Ich behaupte, dass die Linie* GP *ein kleineres Verhältniss* FK : EH *abschneide als jede andere aus* G *nach* EO *gezogene Linie. Denn ziehe eine andere Linie, wie* GS. *Weil* NH *die mittlere Proportionale ist zwischen* ON, NE, *) *so ist nach Fall* 6, II NP : EH *das kleinste Verhältniss. Daher ist* NP : EH < NS : EQ *und* perm. PN : NS < HE : EQ. *Es ist aber* PN : NS = KF : FR, *folglich ist* KF : FR < HE : EQ; perm. *also wird das Verhältniss* FK : EH *kleiner seyn als das Verhältniss* FR : EQ. *Die Linie* GP *schneidet daher ein kleineres Verhältniss* FK : EH *ab als jede beliebige aus* G *gezogene Linie.*

Synthesis. Es sey NH *die mittlere Proportionale zwischen* ON, NE; *verbinde* GH *und verlängere sie nach* P: *so wird die Linie* GKP *ein kleineres Verhältniss* FK : EH *abschneiden als jede andere Linie, welche aus* G *nach* EO *gezogen werden kann. Ist nun das zur Construction gegebene Verhältniss gleich* FK : EH, *so genügt* GKP *allein der Aufgabe. Ist es kleiner, so kann nicht construirt werden. Ist es aber grösser, so erhellet aus dem Vorigen, dass das Problem auf zweierlei Weise zu beiden Seiten der* GK *gelöst werden könne durch Linien nach* OH, HE. *Es sey also das gegebene Verhältniss* m : n *grösser als* FK : EH. *Nimm* m : p = FG : GN, *so ist auch*

m : p = FK : NP.

Es ist aber . . . . . m : n > FK : EH,

folglich ist aus dem Gleichen p : n > NP : EH. *Nun ist nach Fall* 6, II *das Verhältniss* NP : EH *das kleinste; mithin lassen sich zwei gerade Linien zu beiden Seiten der* GP *ziehen, wie die Linie* GS,

---

*) *Im Lat. folgt hier noch:* ac rectae duae *PN*, *ON* positione dantur; ac in recta *PN* sumitur punctum *N*, in ipsa vero *ON* punctum *E*; ac recta parallela ipsi *NP* cadit ultra punctum *E*, nempe recta *GO*: ratio igitur *NP* ad *EH* etc.

welche das Verhältniss NS : EQ = p : n *abschneide, und es ist offenbar, dass beide das Problem lösen.* *)

Cas. III. Fig. 68. *Analysis.* *Es werde nun nach der dritten Art die Linie* GKH *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Verlängere sie nach* P. *Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH *und somit die Linie* GP *der Lage nach gegeben. Die Aufgabe wird nämlich durch Fall* 6, III *gelöst.*

Determination. *Verbinde* GM *und verlängere sie nach* J; *so ist klar, dass das Verhältniss* FM : ME *kleiner sey als das zur Construction gegebene oder als das Verhältniss* FK : EH. *Ist also irgend ein Verhältniss gegeben, welches grösser ist als* FM : ME, *so wird auf folgende Weise construirt werden.*

Synthesis. *Das gegebene Verhältniss oder das Verhältniss* m : n *sey grösser als* FM : ME. *Mache* m : p = FM : NJ, *so wird aus dem Gleichen erhellen, dass* NJ : EM < p : n *sey. Wird also durch* G *eine Linie gezogen, welche von* JN, NE *Segmente in dem Verhältnisse* p : n *abschneidet: so wird diese Linie der* EM *begegnen, weil die dem Punkte* N *näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren. Schneidet also die Linie* GP *das Verhältniss* NP : EH = p : n *ab, so ist klar, dass diese Linie die Aufgabe löse.*

Cas. IV. Fig. 69. *Analysis.* *Es werde nun nach der vierten Art die Linie* GP *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben wird, so ist*

*) *Die letzten Worte „und es ist offenbar u. s. w." lauten im Lat. so:* ac manifestum est rectam illam solvere problema, Eodemque modo demonstrabitur rectam alteram tantundem praestare. *Ein merkwürdiger Satz, weil gar nicht bewiesen wird, dass* GS *die Aufgabe löst.*

auch das Verhältniss NP : EH *gegeben*, *mithin die Linie* GP *der Lage nach. Die Aufgabe wird nämlich auf dieselbe Weise wie die vorhergehende gelöst.*

Determination. Verbinde GM *und verlängere sie nach* J: *so ist klar*, *dass die Construction möglich sey*, *wenn das gegebene Verhältniss kleiner ist als* FM : ME.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n, *kleiner als* FM : ME. *Mache wie* FG : GN *das ist* FM : NJ *so* m : p, *so wird aus dem Gleichen bewiesen werden*, *dass* NJ : EM > p : n *sey. Wird also verlangt durch den Punkt* G *eine gerade Linie zu ziehen*, *welche von* JN, NE *Segmente in dem Verhältnisse* p : n *abschneide: so ist klar*, *dass jene Linie die* MN *treffen werde*, *weil*, *wie schon bewiesen worden ist*, *die dem Punkte* N *näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren. Ist also die Linie* GP *so gezogen*, *dass sie das Verhältniss* NP : EH *gleich* p : n *abschneidet*, *so erhellet*, *dass sie die Aufgabe löse.*

Cas. V. Fig. 70. *Analysis. Es werde nunmehr nach der fünften Art die Linie* KH *gezogen*, *welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist*, *so wie das Verhältniss* NP : EH, *so ist auch die Linie* GH *der Lage nach gegeben. Die Construction reducirt sich nämlich auf Fall* 6, IV. *Hier findet aber eine Gränze statt.*

Determination. Nimm die mittlere Proportionale zwischen ON *und* NE, *wie* NH, *und verbinde* GH: *so wird diese Linie ein grösseres Verhältniss* NP : EH *abschneiden als jede andere aus* G *nach* NB *gehende gerade Linie; woraus hervorgeht*, *dass auch das durch* GH *abgeschnittene Verhältniss* FK : EH *grösser sey als jedes andere durch irgend eine Linie aus* G *nach* FL.

8*

Synthesis. Nimm NH *gleich der mittlern Proportionale zwischen* ON, NE *und verbinde* GH. *Diese Linie* GH *wird ein grösseres Verhältniss* FK : EH *als jede andere Linie abschneiden, die aus* G *nach* FL *gezogen werden kann. Aus den früheren Beweisen aber ist klar, dass das Problem (wenn das gegebene Verhältniss kleiner als* FK : EH *ist)* *) *auf zweierlei Weise gelöst werden könne, durch Linien nämlich, welche zu beiden Seiten der* GH *gezogen werden und* FK, KL *treffen.*

Fall 11.

Es fallen nun die beiden geraden Linien, welche durch den Punkt *G* mit *FM*, *ME* parallel gezogen sind, diesseit der gegebenen Punkte *F*, *E*, wie die Linien *GO*, *GL*. Verbinde *FG* und verlängere sie: so wird diese Linie entweder durch den Punkt *E* gehen, oder jenseit oder diesseit desselben fallen. Sie gehe aber zuerst durch den Punkt *E*. Dann lassen sich durch den Punkt *G* Linien auf vier verschiedene Arten ziehen.

Cas. I. Fig. 71. *Analysis. Es werde nach der ersten Art die Linie* HK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. (Durch* E *ziehe der* MF *die Linie* EU *parallel, welche* HK *in* P *treffe)* **). *Weil nun das Verhältniss* FK : EH *gegeben wird, so wie das Verhältniss* FK : EP, *welches nämlich gleich ist dem Verhältnisse* FG : GE; *so ist auch das Verhältniss* EP : EH *bekannt. Es werden also zwei gerade Linien der Lage nach gegeben, nämlich* HM, EU; *in beiden wird der gemeinschaftliche Punkt* E *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* MEU. *Es ist daher eine ge-*

---

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

**) *Statt dieses eingeklammerten Satzes steht im Lat.:* et agatur per *G* recta *GO* ipsi *MF* parallela.

rade Linie KGH *zu ziehen, welche das gegebene Verhältniss* PE : EH *abschneide. Die Linie* HK *ist aber der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 3, I, *woselbst eine Determination statt findet.*

Determination. Das zu construirende Verhältniss muss nämlich kleiner seyn als FL : EO. *Verlängere* LG *bis* N. *Weil* GO : OE > GO : OH *und* GO : OH = PE : EH, *so ist* GO : OE > PE : EH. *Es ist aber* GO = NE; *mithin ist* NE : OE > PE : EH *und* perm. NE : PE > OE : EH. *Nun ist* NE : PE = LF : FK, *folglich ist* LF : FK > OE : EH *und* perm. FL : EO > FK : EH. *Das Verhältniss* FK : EH, *das ist, das gegebene Verhältniss, muss also kleiner als* FL : EO *seyn.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss m : n *sey kleiner als* FL : EO. *Nimm* p : m *gleich* EG : GF. *Weil nun* EG : GF = EN : FL *und* GO = EN, *so ist*

p : m = GO : FL.

Nun ist . . . . m : n < FL : OE,

folglich ist aus dem Gleichen p : n < GO : OE. *Nimmt man also* GO : OH = p : n, *so wird* OH > OE *seyn. Verbinde* GH *und verlängere sie nach* K: *so ist klar, dass die Linie* HGK *die Aufgabe löse.*

Cas. II. Fig. 72. *Analysis. Ziehe nun nach der zweiten Art die Linie* HK, *welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide, und verlängere sie nach* P. *Weil das Verhältniss* FK : EP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* PE : EH *und somit die Linie* PK *der Lage nach gegeben; indem das Problem auf Fall* 3, II *zurückkommt. Hier findet aber eine Gränze statt.*

Determination. Es muss nämlich das zu construirende Verhältniss grösser seyn als FL : EO. *Verlängere* LG *nach* N. *Weil nun* GO : OH *oder* PE : EH *grösser ist als* GO : OE *das ist als* NE : EO,

so ist perm. PE : EN > EH : EO. *Es ist aber* PE : EN = KF : FL, *folglich ist* KF : FL *grösser als* EH : EO *und* perm. FK : EH *grösser als* FL : EO. *Nun ist* FK : EH *das gegebene Verhältniss; folglich muss dasselbe grösser als* FL : EO *seyn.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss m : n *sey grösser als* FL : EO. *Nimm* p : m = EG : GF *oder* EN : FL, *so wird, weil* m : n > FL : EO *ist, aus dem Gleichen seyn* p : n > EN : EO *das ist* GO : OE. *Es werden nun zwei gerade Linien, nämlich* OE, EP, *der Lage nach gegeben; in beiden wird der Durchschnittspunkt* E *genommen; und das gegebene Verhältniss ist grösser als* GO : OE. *Wird also eine Linie so gezogen, dass sie ein Verhältniss gleich* p : n *abschneidet, so wird sie* EO *treffen. Leistet dieses nun die durch* G *gezogene Linie* PK, *so ist klar, dass die Linie* PHK *der Aufgabe genügt.*

Cas. III. Fig. 73. *Analysis. Es werde nach der dritten Art die Linie* GK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Verlängere sie bis zum Punkte* P. *Weil das Verhältniss* FK : EP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* EP : EH, *mithin die Linie* PK *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 3, III. *Die*

Determination aber ist einleuchtend, denn das zu construirende Verhältniss muss grösser seyn als FM : ME, *weil das Verhältniss* FK : EH *offenbar grösser ist als* FM : ME.

Synthesis. Verbinde GM *und verlängere sie nach* J; *und das gegebene Verhältniss sey* m : n, *grösser als* FM : ME. *Nimm* m : p = FG : GE. *Da nun* FG : GE = FM : EJ *und* m : n > FM : ME, *so erhellet aus dem Gleichen, dass* p : n > EJ : EM *ist. Ziehe also die Linie* KP, *welche das Verhältniss* EP : EH *gleich* p : n *abschneide: so wird diese Linie der* OM *begegnen, weil die dem Punkte* E *näheren geraden*

Linien kleinere *) *Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren. Und es leuchtet ein, dass die Linie* PGHK *die Aufgabe löse.*

Cas. IV. Fig. 74. *Analysis. Es werde nun nach der vierten Art die Linie* HGP *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Weil das Verhältniss* FK : EP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* EP : EH, *mithin die Linie* HP *der Lage nach gegeben.*

Determination. Das zur Construction gegebene Verhältniss muss aber kleiner als FM : ME *seyn, wie aus den frühern Beweisen hervorgeht.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n, *kleiner als* FM : ME. *Verbinde* GM, *verlängere sie nach* J *und nimm* m : p = FG : GE. *Da nun* FG : GE = FM : EJ *und* FM : ME > m : n, *so ist aus dem Gleichen* JE : EM > p : n. *Zieht man also die gerade Linie* HGP, *welche das Verhältniss* EP : EH = p : n *abschneidet, so wird diese Linie die* MH *treffen, weil die dem Punkte* E *näheren geraden Linien kleinere* *) *Verhältnisse abschneiden als die von ihm entferntern; und es ist einleuchtend, dass die Linie* HKP *die Aufgabe löse.*

Fall 12.

Es treffe nun die durch die Punkte *F* und *G* gezogene Linie die *ME* jenseit des Punktes *E*, wie *FGN*: so ist klar, dass durch *G* Linien auf fünf Arten gezogen werden können.

Cas. I. Fig. 75. *Analysis. Es werde nach der ersten Art die Linie* GH *gezogen, welche das gege-*

---

*) *Im Texte steht unrichtig* majores, *indem in Fall* 3 *des ersten Buches die nähere oder entferntere Lage der Linien auf den Punkt* E *in* EP *bezogen wird.*

bene Verhältniss FK:EH *abschneide. Durch den Punkt* N *ziehe die Linie* NP *der* FM *parallel. Weil nun das Verhältniss* FK:NP *(welches nämlich dem Verhältnisse* FG:GN *gleich ist) gegeben ist: so ist auch das Verhältniss* NP:EH *gegeben. Es werden also zwei gerade Linien* NH, NP *der Lage nach gegeben; in* NP *wird der Punkt* N, *in* NH *aber der Punkt* E *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* PNM; *und die durch* G *parallel gezogene Linie, nämlich* GO, *fällt jenseit* *) *des Punktes* E. *Es ist daher eine gerade Linie* PH *zu ziehen, welche das gegebene Verhältniss* NP:EH *abschneide. Diese Linie* PH *ist also vermittelst Fall* 6, I *der Lage nach gegeben.*

Determination. Es muss aber das zur Construction gegebene Verhältniss offenbar kleiner seyn als FM:ME, *weil* $KF < FM$ *und* $EH > EM$ *ist.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m:n *kleiner als* FM:ME. *Verbinde* MG, *verlängere sie nach* J *und nimm* $m:p = FG:GN$ *das ist* $= FM:NJ$; *so ist*

$$m : p = FM : NJ.$$

Es ist aber . . . . . $m : n < FM : ME$,

folglich ist aus dem Gleichen $p:n < NJ:EM$. **) *Wenn wir also aus dem Punkte* G *eine Linie ziehen wollen, welche (nach Fall* 6, I *des ersten Buches) von* NP, EH *Segmente in dem Verhältnisse* p:n *abschneide: so wird diese Linie offenbar die* MB *treffen, weil die dem Punkte* N *näheren geraden Linien kleinere* ***)

---

*) *Im Lat. steht unrichtig* citra, *denn* E *liegt zwischen* O *und* N.

**) *Im Lat. folgt hier noch:* Invertendo autem ratio *n* ad *p* major erit ratione *ME* ad *NJ*. Itaque si faciamus ut *n* ad *p* ita *ME* ad rectam aliam, minor erit illa quam *NJ*. Esto autem illa recta *NP*, ac juncta *GP* producatur ad *H*. Manifestum autem est quod, si velimus ducere etc.

***) *Im Lat. steht: weil die dem Punkte* E *näheren geraden Linien grössere.*

Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren. Es sey also die Linie PH *so gezogen, dass* NP : EH = p : n, *so ist klar, dass diese Linie die Aufgabe löst.*

Cas. II. Fig. 76. *Analysis. Es werde nun nach der zweiten Art die Linie* GK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH, *mithin die Linie* PK *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 6, I.

Determination. Das zur Construction gegebene Verhältniss muss aber grösser seyn als FM : ME.

Synthesis. Verbinde GM, *verlängere sie nach* J *und verfahre völlig wie in der vorhergehenden Art.*

Cas. III. Fig. 77. *Analysis. Ziehe nach der dritten Art die Linie* GK, *welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide, und verlängere sie bis zum Punkte* P. *Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben wird, so wie das Verhältniss* FK : EH, *so ist auch das Verhältniss* NP : EH *gegeben und somit die Linie* PK *der Lage nach vermittelst Fall* 6, II, *woselbst eine Determination statt findet.*

Determination. Nimm NH *gleich der mittlern Proportionale zwischen* ON, NE; *verbinde* GH *und verlängere sie nach* P. *Diese Linie* GP *wird ein kleineres Verhältniss* NP : EH *abschneiden als jede andere Linie, welche aus* G *nach* EO *gezogen werden kann; woraus folgt, dass auch das Verhältniss* FK : EH *kleiner sey als jedes andere durch irgend eine Linie aus* G *nach* EO.

Synthesis. Nach Anleitung dieser Begränzung nun ist die Aufgabe zu lösen; und zwar wird die Construction (wenn das gegebene Verhältniss grösser ist als FK : EH*)* *) *auf zweierlei Weise geschehen*

---

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

zu beiden Seiten der GK *durch Linien, welche nach* OH *und* HE *gezogen werden.*

Cas. IV. Fig. 78. *Analysis. Es werde nun nach der vierten Art die Linie* PK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Durch den Punkt* N *ziehe der* FM *eine Parallele, so wird das Verhältniss* FK : NP *gegeben seyn. Wegen des gegebenen Verhältnisses* FK : EH *aber ist auch das Verhältniss* NP : EH *gegeben; folglich ist die Linie* PK *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 6, III, *woselbst keine Determination statt findet. Die Construction aber ergiebt sich aus dem Vorigen.*

Cas. V. Fig. 79. *Analysis. Es werde nach der fünften Art die Linie* HK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH, *mithin die Linie* HK *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 6, IV, *woselbst eine Gränze statt findet.*

Determination. Nimm NH *gleich der mittlern Proportionale zwischen* ON, NE *und verbinde* GH. *Diese Linie* GH *wird ein grösseres Verhältniss* NP : EH *abschneiden als jede andere aus* G *nach* NA *gezogene Linie; woraus folgt, dass auch das Verhältniss* FK : EH *grösser ist als jedes andere durch irgend eine Linie aus* G *nach* NA.

Synthesis. Die Composition ist einleuchtend und zwar kann sie (wenn das gegebene Verhältniss kleiner ist als FK : EH*)* *) *auf zweierlei Weise geschehen zu beiden Seiten der* HK *durch Linien, welche nach* NH, HA *gezogen werden.*

Fall 13.

Es falle nun die Linie, welche durch die Punkte *G, F* gezogen und verlängert ist, diesseit des Punktes

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

E, wie *NF*. Dann ist klar, dass durch den Punkt *G* Linien auf fünf verschiedene Arten gezogen werden können.

Cas. I. II. III. Fig. 80. 81. 82. *Analysis. Es werden nach der ersten, zweiten und dritten Art die Linien* HK *gezogen, welche die gegebenen Verhältnisse* FK : EH *abschneiden. Durch den Punkt* N *ziehe der* FM *die Linie* NP *parallel. Weil nun die Verhältnisse* FK : EH *gegeben werden, so wie das Verhältniss* FK : NP, *so sind auch die Verhältnisse* NP : EH *gegeben. Es werden also zwei gerade Linien* NP, HM *der Lage nach gegeben; in* NP *wird der Punkt* N, *in* HM *aber der Punkt* E *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* PNM. *Es sind daher gerade Linien zu ziehen, welche die gegebenen Verhältnisse* NP : EH *abschneiden. Mithin sind diese Linien durch Fall* 4, I. II. III *der Lage nach gegeben. Es findet aber daselbst keine Gränze statt und die Construction ist aus dem Vorigen deutlich.*

Cas. IV. Fig. 83. *Analysis. Es werde nach der vierten Art die Linie* GK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Verlängere* GK *nach* P. *Da nun das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH, *mithin die Linie* PK *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 4, IV.

Determination. Das zu construirende Verhältniss muss offenbar grösser als FM : ME *seyn.*

Synthesis. Gegeben sey das Verhältniss m : n, *grösser als* FM : ME. *Verbinde* GM, *verlängere sie nach* J *und nimm* m : p = FG : GN; *so wird aus dem Gleichen folgen, dass* NJ : EM < p : n *ist. Wird also durch den Punkt* G *die Linie* PK *gezogen, welche das Verhältniss* NP : EH = p : n *abschneidet, so wird dieselbe nothwendig die* NM *treffen, weil die Linien, welche dem in der Linie* NM *genommenen Punkte*

N *näher sind, grössere* *) *Verhältnisse abschneiden als die von demselben entfernteren. Und aus dem Vorigen folgt, dass diese Linie* PK *die Aufgabe löst.*

Cas. V. Fig. 84. *Analysis. Es werde nun nach der fünften Art die Linie* PH *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH *und somit die Linie* PH *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 4, IV.

Determination. Es muss aber das zu construirende Verhältniss kleiner als FM : ME *seyn, wie aus dem vorhergehenden Beweise erhellet. Die Composition ergiebt sich aus dem Vorigen.*

Fall 14.

Es fallen nun die beiden mit *EM, MF* parallel gezogenen Linien so, dass die eine von ihnen *GO* diesseit des Punktes *E*, die andere *GL* aber jenseit des Punktes *F* sey. Dann ist klar, dass sich durch den Punkt *G* Linien auf fünf Arten ziehen lassen.

Cas. I. Fig. 85. *Analysis. Es werde nach der ersten Art die Linie* HK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Verbinde* GF, *verlängere sie nach* N *und ziehe durch den Punkt* N *mit* MK *die Linie* NP *parallel, welche die Linie* HK *in* P *treffe. Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH *gegeben. Es werden also zwei gerade Linien* HN, NP *der Lage nach gegeben; in der einen* NP *wird der Punkt* N, *in der andern* HN *aber der Punkt* E *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* HNP; *und die Linie* GO, *welche durch* G *mit* NP *parallel gezogen ist, fällt diesseit des Punktes* E. *Es ist daher die ge-*

*) *lies: weil die dem Punkte* N *(in* NP*) näheren geraden Linien kleinere.*

rade Linie HP *zu ziehen, welche das gegebene Verhältniss* NP : EH *abschneide. Diese Linie ist aber der Lage nach gegeben durch die erste Art des siebenten Falles im ersten Buche, woselbst keine Gränze statt findet.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Nimm* m : p = FG : GN *und ziehe nach der ersten Art des siebenten Falles die Linie* HGP, *welche das Verhältniss* NP : EH *gleich* p : n *abschneide, so ist klar, dass die Linie* HKP *die Aufgabe löst.*

Cas. II. Fig. 86. *Analysis. Es werde nun nach der zweiten Art die Linie* HK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Verlängere* HK *nach* P. *Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH *und somit die Linie* HGP *der Lage nach gegeben vermittelst der zweiten Art des siebenten Falles.*

Determination. Nimm NH *gleich der mittlern Proportionale zwischen* ON, NE, *verbinde* GH *und verlängere sie nach* P. *Ich behaupte, dass die Linie* HP *ein kleineres Verhältniss* FK : EH *abschneide als jede andere Linie, welche aus* G *nach* EO *gezogen werden kann.*

Synthesis. Hieraus geht hervor, wie die Aufgabe gelöst werden könne und dass die Construction (wenn das gegebene Verhältniss grösser als FK : EH *ist)* *) *auf zweierlei Weise möglich sey zu beiden Seiten der* HP *durch Linien, welche nach* EH, HO *gehen.*

Cas. III. Fig. 87. *Analysis. Ziehe nach der dritten Art die Linie* GK, *welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide, und verlängere sie nach dem Punkte* P. *Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH *und*

---

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

somit die Linie GP *der Lage nach gegeben, vermittelst der dritten Art des siebenten Falles.*

Determination. Es ist aber klar, dass das zu construirende Verhältniss grösser seyn müsse als FM : ME.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n, *grösser als* FM : ME. *Verbinde* GM, *verlängere sie nach* J *und nimm* m : p = FG : GN, *so erhellet aus dem Gleichen, dass das Verhältniss* NJ : EM < p : n *ist. Wird also die Linie* GP *gezogen, welche das Verhältniss* NP : EH *gleich* p : n *abschneidet, so wird sie nothwendig die* OM *treffen; denn die dem Punkte* N *näheren geraden Linien schneiden kleinere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren. Folglich löst die Linie* GP *das Problem.*

Cas. IV. Fig. 88. *Analysis. Ziehe nun nach der vierten Art die Linie* GH, *welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide, und verlängere sie bis zum Punkte* P. *Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH *und somit die Linie* GP *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 7, III.

Determination. Es muss aber das zu construirende Verhältniss kleiner seyn als FM : ME.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n, *kleiner als* FM : ME. *Verbinde* GM, *verlängere sie nach* J *und construire völlig wie in der nächst vorhergehenden Art.*

Cas. V. Fig. 89. *Analysis. Es werde endlich nach der fünften Art die Linie* GH *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Weil das Verhältniss* FK : EH *gegeben wird, so wie das Verhältniss* FK : NP, *so ist auch das Verhältniss* NP : EH *und somit die Linie* GH *der Lage nach gegeben vermittelst der vierten Art des siebenten Falles.*

Determination. Nimm NH *gleich der mittlern Proportionale zwischen* ON, NE *und verbinde* GH. *Diese Linie* GH *wird ein grösseres Verhältniss* NP : EH *abschneiden als jede andere Linie, welche aus* G *nach* HN *gezogen werden kann; woraus nach dem Vorigen folgt, dass auch das Verhältniss* FK : EH *grösser sey als jedes andere durch irgend eine Linie aus* G *nach* FL.

Synthesis. Es ist klar, dass (wenn das gegebene Verhältniss kleiner ist als FK : EH*)* *) *die Construction auf zweierlei Weise geschehen könne zu beiden Seiten der* GH, *durch Linien nämlich, welche nach* FK, KL *gezogen werden. Dieses alles aber ergiebt sich leicht aus den früheren Beweisen.*

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙΣ.

Den beiden der Lage nach gegebenen geraden Linien *AB*, *CD* begegnen die beiden Parallelen *GO*, *GL* ausserhalb **) der gegebenen Punkte *E*, *F*: so können offenbar auf fünf Arten Linien aus *G* gezogen werden.

I. II. Fig. 90. *Es schneiden also nach der ersten und zweiten Art die Linien* HK *die Verhältnisse* FK : EH *gleich den gegebenen ab. Verbinde die Punkte* G, F; *verlängere die Linie* GF *nach* N *und durch den Punkt* N *ziehe die Linie* NS *mit* CD *parallel; verlängere auch die Linie* HK *nach* P. *Weil nun die beiden Linien* NG, GF *der Grösse nach gegeben sind, so ist ihr Verhältniss gegeben. Es ist aber* NG : GF = NP : FK, *mithin wird das Verhältniss* NP : FK *ge-*

---

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

**) *d. h. die Parallelen gehen nicht durch die Punkte* E, F.

geben; und da das Verhältniss FK : EH *gegeben ist, so wird auch das Verhältniss* NP : EH *gegeben. Es werden also zwei gerade Linien* BN, NS *der Lage nach gegeben; in* BN *wird der Punkt* E, *in* NS *aber der Punkt* N *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* BNS *und die durch* G *mit* CD *parallel gezogene Linie geht nicht durch den Punkt* E; *es ist daher eine Linie* HGKP *zu ziehen, welche das Verhältniss* NP : EH *gleich einem gegebenen abschneide. Die Auflösung ergiebt sich hieraus. In der ersten Art findet keine Gränze statt; nicht so in der zweiten. Man wird hier aber die Gränze bestimmen, indem man* NH *gleich der mittlern Proportionale zwischen* NO *und* NE *nimmt,* GH *verbindet und diese Linie nach* P *verlängert. Dann ist nämlich das Verhältniss* NP : EH *in den Linien* NS, EO *ein kleinstes. Ich behaupte nun, dass auch das Verhältniss* FK : EH *in den Linien* MD, EO *ein kleinstes sey. Denn ziehe aus dem Punkte* G *eine andere gerade Linie* RGS. *Weil nun* NP : EH < NS : ER, *so ist* perm. NP : NS < EH : ER. *Es ist aber* NP : NS = FK : FQ, *folglich ist auch* FK : FQ < EH : ER *und* perm. FK : EH < FQ : ER. *Das Verhältniss* FK : EH *ist also das kleinste in den Linien* MD, EO.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Dieses Verhältniss wird entweder gleich seyn dem Verhältnisse* FK : EH *oder kleiner oder grösser. Ist nun das Verhältniss* m : n *gleich* FK : EH, *so wird die Linie* PG *allein das Problem lösen. Ist es kleiner, so ist die Aufgabe unmöglich. Ist es aber grösser, so kann auf zweierlei Weise construirt werden. Man setze also, das Verhältniss* m : n *sey grösser als* FK : EH. *Mache* m : p = FG : GN, *so wird das Verhältniss* p : n *grösser seyn als* NP : EH, *und es wird sich daher aus dem Punkte* G *eine Linie ziehen lassen, welche das Verhältniss* p : n *abschnei-*

det, und zwar auf zweierlei Weise, zu beiden Seiten der GP. *Ziehe also solche Linien* RGS, rGs: *ich behaupte, dass beide der Aufgabe genügen. Denn weil* FG : GN = Fq : Ns *und auch* = m : p, *so ist* Fq : Ns = m : p. *Es ist aber* Ns : Er = p : n, *folglich ist aus dem Gleichen* Fq : Er = m : n. *Die Linie* rGsq *genügt also der Aufgabe; und aus demselben Grunde leistet dasselbe die andere Linie* RGQS.

III. IV. Fig. 91. *Es schneiden nun nach der dritten und vierten Art die Linien* GHK *die Verhältnisse* FK : EH *gleich den gegebenen ab. Verbinde* GF, *verlängere sie nach* N *und durch den Punkt* N *ziehe eine Linie* NP *mit* CD *parallel; verlängere auch* GKH *nach* P. *Da die Linien* NG, GF *der Grösse nach gegeben sind, so ist ihr Verhältniss gegeben; und da* NG : GF = NP : FK, *so ist auch das Verhältniss* NP : FK *bekannt. Wegen des gegebenen Verhältnisses* FK : EH *ist also auch das Verhältniss* NP : EH *gegeben. Es werden also zwei gerade Linien in einer Ebene gegeben, nämlich* BN, UP; *in* BN *wird der Punkt* E, *in* UNP *aber der Punkt* N *genommen; der gegebene Punkt* G *ist innerhalb des W.* BNU *und die Linie, welche durch* G *mit* NP *parallel gezogen wird, fällt diesseit* *) *des Punktes* E. *Es ist also durch* G *eine Linie* GHP *zu ziehen, welche das Verhältniss* NP : EH *gleich einem gegebenen abschneide. Offenbar aber ist das Verhältniss* KF : FM *in der dritten Art grösser, in der vierten dagegen kleiner als* HE : EM, *also ist* perm. *das Verhältniss* FK : EH *in* III *grösser, in* IV *aber kleiner als* FM : ME. *Nun ist* FK : EH *gleich dem*

*) *d. h. zwischen* E *und* NP. *Oben war bloss angenommen, dass die Parallele nicht durch* E *gehe. Dieselbe Bemerkung ist in* Cas. V *zu machen.*

gegebenen Verhältnisse; folglich muss das gegebene Verhältniss in III *grösser, in* IV *aber kleiner als* FM : ME *seyn.*

Synthesis. Verbinde GM *und verlängere sie nach* J. *Das gegebene Verhältniss sey* m : n, *in* III *grösser, in* IV *aber kleiner als das Verhältniss* FM : ME. *Mache* m : p = FG : GN, *so wird das Verhältniss* p : n *in* III *grösser, in* IV *aber kleiner als* NJ : EM *seyn. Daher* *) *wird die Linie* GMJ *in* III *ein kleinstes, in* IV *aber ein grösstes Verhältniss abschneiden. Soll also aus* G *eine Linie gezogen werden, welche das Verhältniss* p : n *abschneidet, so wird dieselbe entweder nach der dritten Art die* EM *treffen, oder nach der vierten auf die andere Seite des Punktes* M *fallen. Ist nun die Linie* GP *so gezogen, dass* NP : EH = p : n, *so wird auch* FK : EH = m : n *seyn. Folglich genügt diese Linie* GP *der Aufgabe.*

V. Fig. 92. *Es schneide endlich nach der fünften Art die Linie* GKH *das Verhältniss* FK : EH *gleich dem gegebenen ab. Verbinde* GF, *verlängere sie nach* N *und ziehe durch* N *die Linie* US *der* CD *parallel. Weil nun die Linien* NG, GF *der Grösse nach gegeben sind, so ist das Verhältniss* NG : GF *gegeben. Es ist aber* NG : GF = NP : FK. *Wegen des gegebenen Verhältnisses* FK : EH *also ist auch das Verhältniss* NP : EH *gegeben. Es sind also in einer Ebene zwei gerade Linien der Lage nach gegeben, nämlich* EN, US; *in* EN *wird der Punkt* E *und in* US *der Punkt* N *genommen; der gegebene Punkt* G *aber ist innerhalb des W.* ENS *und die durch* G *mit*

---

*) *Dieses* **Daher** (Quocirca) *ist unverständlich. Entweder ist zu lesen: „Die Linie* GMJ *schneidet* **aber** . . ." *oder es ist vorher der Satz zu ergänzen: „Die dem Punkte* N *näheren geraden Linien schneiden aber kleinere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren."*

CD *parallel gezogene Linie fällt diesseit des Punktes* E. *Es ist daher die gerade Linie* HGP *durch den Punkt* G *zu ziehen, welche das Verhältniss* NP : EH *gleich einem gegebenen abschneide, wie aus dem Obigen hervorgeht.*

Die Gränze aber wird bestimmt, indem man NH *gleich der mittlern Proportionale zwischen* ON, NE *nimmt und die Linie* GH *zieht, welche von* US, EN *die Segmente* NP, EH *abschneidet, deren Verhältniss ein grösstes ist. Ich behaupte, dass dieselbe Linie von* CD, EN *ein grösstes Verhältniss* FK : EH *abschneide. Denn ziehe eine andere Linie* GR, *so wird seyn* NP : EH > NS : ER *und* perm. NP : NS > EH : ER. *Es ist aber* NP : NS = KF : FQ, *also ist* KF : FQ > EH : ER *und* perm. FK : EH > FQ : ER. *Daher ist auch in den Linien* CD, EN *das Verhältniss* FK : EH *ein grösstes.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n, *welches entweder gleich ist dem Verhältnisse* FK : EH, *oder grösser, oder kleiner. Ist es ihm gleich, so wird die Linie* GH *allein die Aufgabe lösen. Ist es grösser, so ist die Aufgabe unmöglich. Wenn es aber kleiner ist, so wird auf zweierlei Weise construirt werden. Es sey also das Verhältniss* m : n *kleiner als das Verhältniss* FK : EH; *mache* m : p *gleich* FG : GN, *so ist offenbar, dass das Verhältniss* p : n *kleiner ist als* NP : EH. *Nun ist aber das Verhältniss* NP : EH *das grösste, folglich ist es möglich aus* G *eine Linie zu ziehen, welche das Verhältniss* p : n *abschneidet, und zwar auf zweierlei Weise, zu beiden Seiten der* GH. *Sind also die Linien* GR, Gr *gezogen, welche Verhältnisse gleich* p : n *abschneiden, so behaupte ich, dass sie die Aufgabe lösen. Denn es ist* FG : GN *das ist*

FQ : NS *wie* m : p
und NS : ER *wie* p : n;
folglich ist aus dem Gleichen FQ : ER *wie* m : n. *Die Linie* GR *löst daher die Aufgabe; und auf gleiche Weise wird gezeigt, dass die Linie* Gr *dasselbe leiste.*

A n h a n g.

Enthaltend einige allgemeine Anmerkungen und die Construction der Örter, welche die Aufgabe vom Verhältnissschnitt lösen.

Anmerkung 1.

Buch 1. Fall 1. 2.

Wenn die Punkte E, F, G *in einer geraden Linie liegen, so schneidet jede durch* G *gezogene Linie* HK *von den gegebenen* AB, CD *Segmente* EH, FK *in dem Verhältnisse* EG : GF *ab. Daher ist alsdann die Aufgabe nur in dem einzigen Falle möglich, wenn das gegebene Verhältniss gleich* EG : GF *ist, und wird dann zugleich unbestimmt.*

Anmerkung 2 (*Halley*).

Buch 1. Fall 4 bis 7.

Zur Auflösung der vier letzten Fälle des ersten Buches ist erforderlich, dass GL : FO *gleich dem gegebenen Verhältnisse gemacht werde. Es fragt sich also, nach welcher Richtung hin* FO *zu nehmen sey. Da in allen Fällen* MK : KL = KF : FO *und aus dieser Proportion* componendo *oder* dividendo *u. s. w. eine andere hergeleitet wird, so müssen die Punkte* K, F, O *in derselben Ordnung auf einander folgen, in welcher die Punkte* M, K, L *genommen sind. Liegen also* MK, KL *vom Punkte* K *aus nach derselben Richtung oder nach entgegengesetzter: so müssen auch* KF, FO *vom Punkte* F *aus gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben. Auch verdient bemerkt*

zu werden, dass an LO *ein dem* ▭ ML . FO *gleiches Rechteck entworfen werden müsse, so dass der Überschuss ein Quadrat ist, wenn* FO *von* F *aus nach derselben Richtung hin liegt, nach welcher* G *von* AB *aus genommen ist; so aber, dass die Ergänzung ein Quadrat ist, wenn* FO *nach der entgegengesetzten Richtung liegt. — In Fall* 5 *ist überall* F *statt* L *zu lesen.*

Anmerkung 3.

Buch 2. Fall 2.

Der zweite Fall des zweiten Buches lässt sich wie Fall 8. 9 *behandeln, wodurch, wie* ***Halley*** *behauptet, die Analysis und Determination einfacher werde. Dem ist aber nicht so. Ziehe in* Fig. 34. 35 *nach* AB *die Linie* GO *parallel zu* CD, *so ist*

EH : FK = ▭ EHO : FK . HO
= ▭ EHO : OM . MF.

Daher ist ▭ EHO *gegeben. Wegen* Pappi Lemma 13 *und weil der Punkt* M *zwischen* E, O *liegt, wird also in beiden Figuren eine doppelte Determination statt finden, ähnlich der Apollonischen Darstellung. Es ist nämlich* EM *in* Fig. 34 *entweder grösser oder nicht grösser als* MO; *in* Fig. 35 *aber entweder kleiner oder nicht kleiner als* MO.

Anmerkung 4 (*Halley*).

Buch 2.

Die Fälle 7. 8. 9 *des zweiten Buches löst Apollonius ohne Hilfe des ersten Buches auf. Auch die übrigen Fälle des zweiten Buches können unabhängig vom ersten gelöst werden.*

Es sey (Fig. 93) die Linie HK so gezogen, dass EH : FK gleich dem gegebenen Verhältnisse ist. Verbinde EG, welche CD in N schneide, ziehe GL, GO parallel den Linien AB, CD und mache EO : FT gleich EH : FK; so ist FT und der Punkt T bekannt. Weil nun EO : FT = EH : FK, so ist perm. OE : EH = TF : FK und convert.

EO : OH = FT : TK,

Es ist aber . . . . EO : OH = KL : LN,

weil □ EO . LN = □ OH . KL, indem jedes derselben gleich □ OGL ist. Folglich ist FT : TK = KL : LN und □ FT . LN = □ TKL. Nun ist □ FT . LN wegen seiner bekannten Seiten gegeben, mithin auch □ TKL, also der Punkt K und die Linie GK.

Sinnreich lehrt Halley die Aufgabe des zweiten Buches in die Aufgabe des ersten zu verwandeln. Es sey (Fig. 94) die Linie GHK so gezogen, dass EH : FK gleich dem gegebenen Verhältnisse m : n ist. Macht man nun EM : Fa = m : n, so ist auch MH : aK = m : n. Man betrachte also als gegeben in AB den Punkt M und in CD den Punkt a (oder a' für die Linie H'K') und ziehe, wie im ersten Buche gelehrt worden ist, aus G die Linie HK so, dass MH : aK (oder MH' : a'K') = m : n ist; so wird auch EH : FK (oder EH' : FK') = m : n seyn.

Ferner bemerkt Halley, dass sich die meisten Fälle des zweiten Buches auf eine doppelte Art construiren lassen, indem durch den gegebenen Punkt G eine Parallele nach der einen oder der andern von den gegebenen Linien AB, CD gezogen werden könne. Durch diese verschiedenen Constructionen wird jedoch nicht, wie Halley behauptet, die Aufgabe auf andere Fälle des ersten Buches zurückgeführt, sondern stets auf dieselben. Dass sich aber wirklich im zweiten Buche beide Constructionen vorfinden, hat Halley übersehen (vergl. die Vorrede).

Anmerkung 5 (*Halley*).

Alle geraden Linien, welche von zwei der Lage nach gegebenen geraden Linien Segmente abschneiden, die gegebenen Punkten anliegen und deren Verhältniss einem gegebenen gleich ist, gehen entweder durch einen gegebenen Punkt, oder sind einer der Lage nach gegebenen Linie parallel, oder berühren einen Kegelschnitt.

1. Buch 1. Fall 1. 2.

Die der Lage nach gegebenen Linien *AB*, *CD* sind einander parallel. Fig. 95.

In AB *wird der Punkt* E, *in* CD *der Punkt* F *genommen und das gegebene Verhältniss sey* m : n. *Verbinde* EF, *mache* EL = m, MF = FP = n *und verbinde* LP, LM, *welche die Linie* EF *in den Punkten* Q, R *schneiden: ich behaupte, dass jede durch* Q *oder durch* R *gezogene Linie von den gegebenen* AB, CD *Segmente, die den Punkten* E, F *anliegen, in dem gegebenen Verhältnisse* m : n *abschneide. Denn ziehe durch* R *eine beliebige Linie* KH, *so ist*

$$EH : FK = ER : RF = EL : FM = m : n.$$

Eben so, wenn durch Q *eine beliebige Linie* H′ K′ *gezogen wird, ist*

$$EH' : FK' = EQ : QF = EL : FP = m : n.$$

Wird nun irgend ein Punkt G *innerhalb oder ausserhalb der Parallelen gegeben, so verbinde* GR, GQ; *so werden beide Linien von* AB, CD *Segmente in dem Verhältnisse* m : n *abschneiden. Ist eine von den Linien* GQ, GR *parallel mit* AB, *welche also die gegebenen nicht trifft: so wird nur die andere die Aufgabe lösen. In diesem Falle ist nämlich, wenn z. B.* GR ⋕ AB *ist*, H′G : GK′ *(das ist* EG : GN *in* Fig. 1) *gleich dem gegebenen Verhältnisse* m : n *oder gleich* ER : RF. *Hieraus ergiebt sich zugleich Alles, was*

Apollonius über die Gränzen der Verhältnisse gesagt hat. — Auch ist zu bemerken, dass die Linie EF *in den Punkten* Q, R *harmonisch getheilt wird, weil* EQ : QF = ER : RF *ist.*

II. Buch 1. Fall 3.

Die gegebenen Linien *AB*, *CD* schneiden einander; in beiden wird der Durchschnittspunkt *M* genommen. Fig. 96.

Das gegebene Verhältniss sey m : n. *In* AB *nimm* MN = m *und in* CD *mache* PM = MQ = n *und verbinde* NP, NQ*: so wird jede mit* NP *oder* NQ *parallel gezogene Linie von* AB, CD *Segmente in dem Verhältnisse* m : n *abschneiden. Ist also irgend ein Punkt* G *gegeben, so ziehe durch ihn die Linien* HK *und* H′K′ *parallel mit* NP *und* NQ*: so leisten beide das Verlangte. Geht eine der beiden durch* G *gezogenen Linien durch* M, *so löst nur die andere die Aufgabe.*

III. Buch 1. Fall 4 bis 7.

Die gegebenen Linien *AB*, *CD* schneiden einander; in *AB* wird der Durchschnittspunkt *M*, in *CD* der Punkt *F* genommen. Fig. 97.

Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Nimm in* AB *die Abschnitte* MP = MQ *so, dass* PM : MF = m : n, *und beschreibe die Parabeln* RPFS, TFQU, *welche die Linien* AB, CD *in* P, F*;* Q, F *berühren: so behaupte ich, dass jede Tangente derselben von den Linien* AB, CD *Segmente, die den Punkten* M, F *anliegen, abschneiden, deren Verhältniss gleich* m : n *ist.*

Denn ziehe an eine von beiden Parabeln, z. B. an RPS, *eine beliebige Tangente, welche* AB, CD *in* H, K *treffe: so ist* (Apollon. Sect. Conic. lib. 3 prop. 41. Rob. Simson Sect. Conic. lib. 5 prop. 14) MP : PH

= FM : MK *und* perm. PM : MF = PH : MK; *und da die Summen oder Differenzen der homologen Glieder dasselbe Verhältniss haben, so ist* MH : FK = PM : MF = m : n.

Zusatz. Wenn der gegebene Punkt G *ausserhalb beider Parabeln liegt, so giebt es immer vier Tangenten; liegt er zwischen den Schenkeln einer Curve, so lassen sich nur zwei Tangenten ziehen; und liegt er in einer Curve selbst, so giebt es drei Tangenten, welche das Verlangte leisten. Es wird also nachgewiesen werden müssen, in wiefern diese Lagen mit den Determinationen des* 5. 6. 7. *Falles übereinstimmen.*

Durch F *ziehe mit* AB *eine Linie parallel, welche die Parabeln in* R, U *schneide, mache* bM = MF *und verbinde* bP, *welche* FR *in* a *treffe. Wegen der Parallelen ist*

bP : Pa = bM : MF,

also bP = Pa *und desshalb* ab *ein Durchmesser der Parabel* RS (Sims. I, 14. Conv.). *Weil nun* FR *der durch den Scheitel* P *des Durchmessers* ab *gehenden Tangente* MB *parallel ist, so ist* FR *eine Ordinate dieses Durchmessers* (Sims. I, 11) *und wird also von ihm in* a *halbirt. Verbinde* bR, *welche* AB *in* c *treffe, so berührt sie die Parabel* (Sims. I, 14. Cor. 1), *mithin ist nach dem Obigen*

Mc : Fb = PM : MF = m : n.

Es ist aber Mc *die Hälfte von* FR, *und* Fb *die Hälfte von* 4 FM, *folglich ist auch*

RF : 4 FM = m : n.

Liegt also der gegebene Punkt G *in der Linie* RF (*Fall* 5) *und ist* PM : MF *oder* m : n = GF : 4 FM, *so werden die Punkte* G, R *in einander fallen und es lassen sich nur* 3 *Tangenten ziehen. Ist* PM : MF *oder* m : n > GF : 4 FM, *so liegt der Punkt* G *zwischen* F, R *und es giebt nur* 2 *Tangenten an die*

Parabel TU. *Ist endlich* $m : n < GF : 4 FM$, *so liegt* G *in der Verlängerung der* FR *und es giebt* 4 *Tangenten. Alles dieses stimmt überein mit der Determination des fünften Falles.*

Ferner ziehe durch irgend einen Punkt L *in* MD *eine Linie mit* AB *parallel, welche die Parabel* RS *in* E, N *treffe, und durch* N *ziehe eine Tangente, welche* AB, CD *in* H, K *schneide: so ist wegen der Tangenten* (Sims. V, 14)

$$FM : MK = KH : HN.$$

Wegen der Parallelen MH, LN *aber ist*

$$KM : ML = KH : HN,$$

folglich ist $FM : MK = KM : ML$, *also* MK *die mittlere Proportionale zwischen* FM, ML. *Wird nun* $OK = KL$ *gemacht, so ist (wie im* 6. *und* 7. *Falle des ersten Buches erwiesen worden ist)*

$$MH : FK = NL : FO.$$

Wegen der Parabel aber ist (Sims. V, 14)

$$MH : FK = PM : MF;$$

folglich ist $NL : FO = PM : MF$ *das ist* $= m : n$.

Eben so, wenn durch E *die Tangente* hk *gezogen und* $ok = kL$ *gemacht wird, lässt sich zeigen, dass* $EL : Fo = Mh : Fk = PM : MF = m : n$ *ist.*

Wird nun in der Linie LN *irgend ein Punkt* G *genommen und ist* $m : n = GL : FO$, *so fällt* G *in* N *und es giebt* 3 *Tangenten. Dasselbe findet statt, wenn* $m : n = GL : Fo$ *ist, in welchem Falle* G *in* E *liegt. Ist* $m : n > GL : FO$ *und* $< GL : Fo$, *so liegt* G *zwischen* E, N *und dann lassen sich nur* 2 *Tangenten an die Parabel* TU *ziehen. Endlich wenn* $m : n < GL : FO$ *oder* $> GL : Fo$ *ist, so liegt* G *in einer von den Verlängerungen der* EN *und dann lassen sich stets* 4 *Tangenten ziehen. — Diese Bestimmungen kommen sämmtlich überein mit den Determinationen des* 6. *und* 7. *Falles im ersten Buche.*

IV. Buch 2.

Die gegebenen Linien *AB*, *CD* schneiden einander in *M*; in *AB* wird der Punkt *E*, in *CD* der Punkt *F* genommen. Fig. 98.

Das gegebene Verhältniss sey m : n. *In* AB, CD *nimm die Abschnitte* Ep, Fq *so dass die Verhältnisse*

EM : Fq *und* Ep : FM

gleich m : n *sind; mache* PE = Ep, QF = Fq *und beschreibe zwei Parabeln, deren eine die Linien* AB, CD *in* P, Q; *die andere aber dieselben Linien in* p, q *berührt: so wird jede Tangente dieser Parabeln von* AB, CD *Segmente, die den Punkten* E, F *anliegen, in dem gegebenen Verhältnisse* m : n *abschneiden. Denn weil die Verhältnisse*

EM : Fq *oder* EM : FQ

und Ep : FM *oder* EP : FM

gleich m : n *sind und die Summen oder Differenzen der homologen Glieder dasselbe Verhältniss haben, so ist*

pM : Mq = m : n

und PM : MQ = m : n.

Ziehe nun eine beliebige Tangente an eine Parabel, welche AB, CD *in* H, K *schneide, so ist* (Sims. V, 14) pH : HM = MK : Kq *und* comp. pM : MH = Mq : qK, *also* perm.

pM : Mq = MH : qK.

Nun ist . . . . . pM : Mq = EM : Fq,

denn jedes dieser Verhältnisse ist gleich m : n. *Daher ist* MH : qK = EM : Fq. *Nimmt man also die Differenzen der homologen Glieder, so erhält man* EH : FK = EM : Fq = m : n.

Zusatz 1. *Nach der Construction ist*

EM : FQ = EP : FM = m : n.

Ist nun PE = EM, *also* EM : MF = m : n, *so ist auch* MF = FQ *und die Punkte* P, Q *fallen beide in* M *zusammen. In diesem Falle lässt sich nur die Para-*

bel pq *construiren; ausser den Tangenten derselben löst dann aber auch jede durch* M *gehende, so wie jede der* EF *parallele Linie die Aufgabe.*

Ist aber PE $\gtrless$ EM, *so ist auch* MF $\gtrless$ FQ. *Daher kann die Parabel* PQ *nie im W.* AMD *liegen, sondern nur in einem seiner Nebenwinkel.*

Zusatz 2. *Weil die Tangenten* pM, Mq *der einen Parabel, so wie die Tangenten* PM, MQ *der andern von derselben dritten Linie* EF *proportionirt geschnitten werden: so berührt diese Linie* EF *beide Parabeln* (Sims. V, 14. Conv.). *Wenn daher einer von den Berührungspunkten dieser Linie der gegebene Punkt* G *ist, so kann die Aufgabe nur auf eine Weise gelöst werden, nämlich durch eine Tangente an die andere Parabel, in welcher* G *nicht liegt. Ist aber ein anderer Punkt in* EF *gegeben oder liegt der Punkt* G *zwischen den Schenkeln einer Curve, so lassen sich zwei Tangenten ziehen. Findet sich der Punkt* G *in einer Curve selbst, so giebt es drei Tangenten. In allen übrigen Fällen lassen sich stets vier Tangenten ziehen.*

Bei dem Verleger dieses Werkes sind unter andern nachstehende Schriften erschienen:

Richter, August, Lehrbuch der reinen Mathematik für die mittlern Klassen höherer Lehranstalten. 3 Theile. 8.
1. Theil: Die Elemente der Arithmetik. 10 Sgr.
2. Theil: Die Elemente der Planimetrie und der rechnenden Geometrie. Mit 2 Tafeln Figuren. 12 Sgr.
3. Theil: Lehrsätze und Aufgaben zur Uebung in der Planimetrie. Mit 2 Tafeln Figuren. 6 Sgr.

— — Aufgaben (350) über das geradlinige Dreieck, trigonometrisch gelöst. Mit 1 Taf. Fig. gr. 8. geheftet 15 Sgr.

(Sahme, J. C.) Chronologischer Abriß der Weltgeschichte zum Schulgebrauch. 8. 5 Sgr.

Scheibert, J. W., Practische Anleitung, die Regeldetri in kurzer Zeit gründlich zu erlernen. Ein Leitfaden für den Rechenunterricht. 1. Abth. Reine Regeldetri. 8. geh. 5 Sgr.

Peter Schumacher's deutliche und gründliche Anweisung zum Rechnen, darin das künstliche und natürliche Rechnen in allen Rechnungsarten und der Praktik erläutert und begreiflich gemacht wird. Zum Gebrauch der Lehrenden u. Lernenden. 7. verbess., nach dem neuen Münzfuß bearb. Ausg. 8. (13½ Bog.) n. 6 Sgr.

Schlewe, Carl Friedrich, Morgen- und Abendopfer für Schulen, und die fünf Hauptstücke der christlichen Lehre, nach Witschel; nebst mehreren Weihnachts- und Geburtstagswünschen, Gelegenheitsgedichten, Gesängen und Stammbuch-Aufsätzen. 8. (10 Bogen.) 10 Sgr.

Tolkemit, J. G., Religion, Tugend, Natur und Häuslichkeit. Eine Blumenlese aus deutschen Dichtern für gebildete Frauen. 8. 20 Sgr.

Der Preußische Kinderfreund. Ein Lesebuch für Stadt- und Landschulen. 17. verbess. Ausg. 8. (19 Bog.) n. 4 Sgr.
In Pappe gebunden n. 6 Sgr.

Neues Schulgesangbuch. Nebst Gebeten. 8. (25½ B.) 10 Sgr.

Dittmann, (S. E. Superint. &c.), Die Lehre Jesu oder Fragen an Kinder, die confirmirt werden sollen. Mit beigefügtem Dr. Luther's kl. Katechismus. 11. Aufl. 8. (3 Bogen.) n. 1⅓ Sgr.

Episteln und Evangelia. 8. (13½ Bogen.) n. 3⅓ Sgr.

Der Psalter nach Luther's Uebersetzung. 8. (8 B.) n. 3 Sgr.

Im Laufe dieses Jahres erscheint:

Braunschweig, Fr. (alias Moralis), Marfa, letzte Fürstin Boretzki und Bürgermeisterin zu Nowogrod, oder das belagerte Nowogrod. Trauerspiel in fünf Abtheilungen. Nach Karamsin's Russischen Annalen bearbeitet.

N
D
A

10.
26.
E B D F N G D P H Q K F M C A G H P R S M F B G R L K C G B D F L C

G
F D
R
40.
P
H
M
E
A H
47
P
E H N
54.
K
F
H
61.
G
M E
L G
M H E O
K

74
81
88.
93.
96.
98.
J P G F L K M E O
P E H N
L G F K N H M O E P J
B O G H K F M N L E A
G P K D
H E P K M

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Apollonius / Halley, Edmond, / Richter, August

Zwei Bücher vom Verhältnisschnitt (de sectione Rationis) Mit vier Tafeln Figuren

Elbing 1836

A.gr.b. 469
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10234705-6